EURELEC

MATHEMATIQUES

COURS DE BASE

ELECTRONIQUE

1 – INCLINAISON ET PENTE DES GRAPHIQUES

Reprenons l'étude des représentations graphiques au point où nous l'avons laissée dans la dernière leçon de Mathématiques.

Nous avons déjà vu comment on construit le système de référence des diagrammes cartésiens et comment on trace le graphique de la loi d'Ohm en partant de sa formule. Reprenons et généralisons maintenant l'étude de cette même loi, en considérant la position que le graphique doit occuper par rapport aux axes du système de référence.

En nous rappelant que la loi d'ohm est représentée par une droite, cherchons à définir exactement ce qu'est la position d'une droite dans le diagramme cartésien.

La position de la droite peut être établie en se basant sur deux éléments, le POINT DE RENCONTRE avec les axes du diagramme et la DIRECTION dans le plan de la feuille.

Nous avons déjà vu que le point de rencontre de la droite représentant la loi d'Ohm, tombe sur l'origine du système de référence, et, de ce détail, nous avons déduit que l'intensité est égale à zéro, lorsque la tension appliquée au circuit est égale à zéro : cela est facile à deviner car sans tension, on n'a pas d'intensité.

En ce qui concerne la direction de la droite, nous avons observé qu'elle s'incline par rapport à l'axe des ordonnées et on pourrait même ajouter qu'elle est en pente par rapport à l'axe des abscisses. De ces détails supplémentaires, nous pourrons déduire de nouvelles informations sur les grandeurs qui apparaissent dans la loi d'Ohm.

Avant de continuer l'étude des graphiques, il convient de préciser les concepts d'INCLINAISON et de PENTE, qui serviront à établir d'une manière bien définie la position d'une droite par rapport aux deux axes du système de référence.

L'INCLINAISON ET LA PENTE d'une ligne ou d'un plan, sont des concepts simples. Chacun sait ce que signifie l'inclinaison d'un poteau ou d'une paroi, ou la pente d'une route.

Toutefois, dans le langage commun, il existe une certaine confusion entre ces deux concepts. Cette confusion provient du fait qu'un même objet présente en même temps, une INCLINAISON et une PENTE DONNEES.

Observons par exemple la position des échelles dessinées sur la Figure 1.

En comparant la position des deux échelles, nous notons qu'elles sont inclinées différemment par rapport à la verticale représentée par le mur. La première (Figure 1-a) est plus inclinée que la seconde (Figure 1-b). Quant au mur qui est droit, son inclinaison est égale à zéro.

D'autre part, nous pouvons aussi noter que les deux échelles présentent une pente différente par rapport au plan du sol. Nous observons ici toutefois que la pente de la première échelle est plus faible que celle de la seconde, celle-ci étant moins inclinée par rapport au sol. Quant au plan de celui-ci, il ne présente pas de pente, ce qui revient à dire que sa pente est égale à zéro.

Imaginons maintenant de prendre une échelle et de la tenir droite, en position verticale. Nous devons dire alors que son INCLINAISON EST ZERO et sa pente maximale.

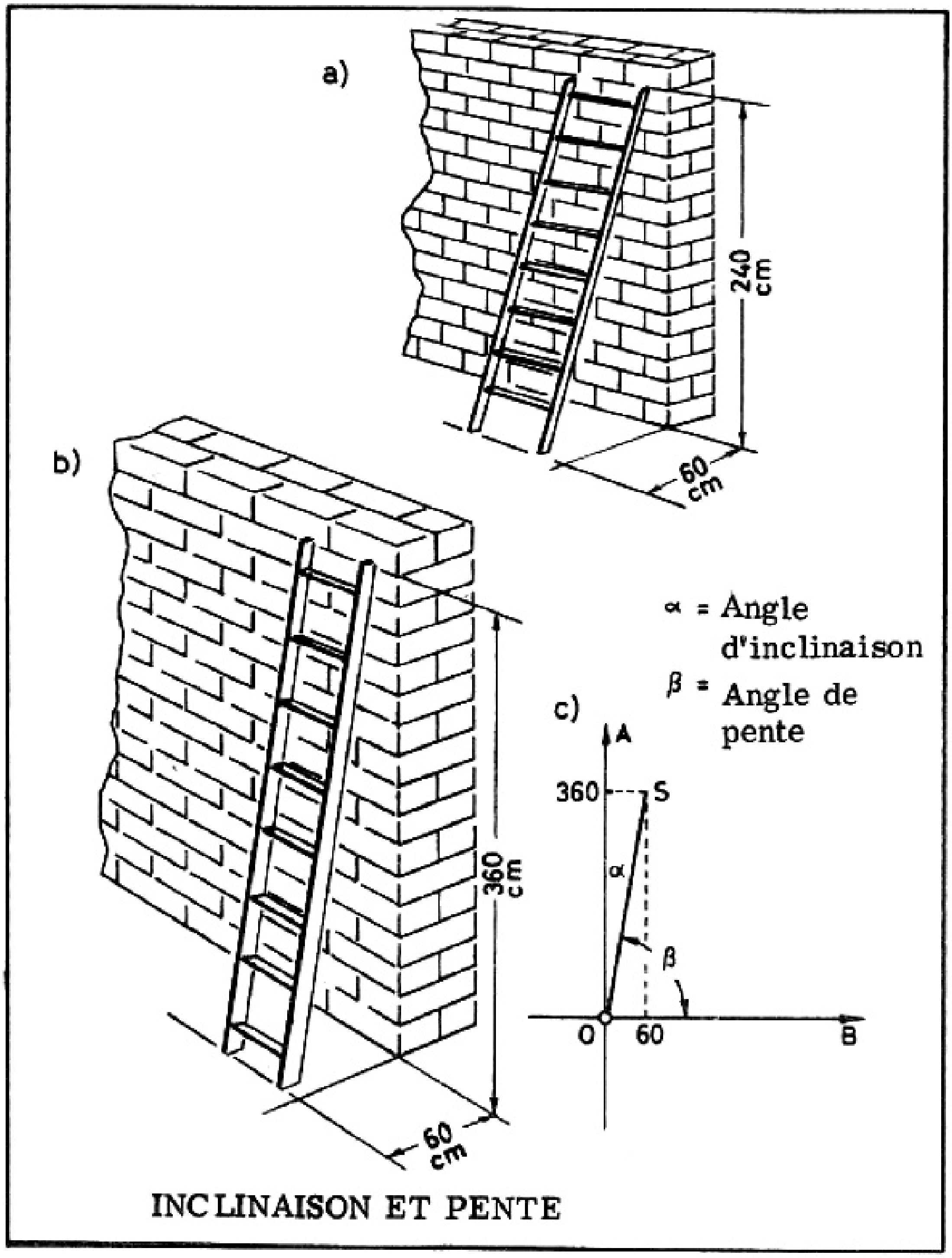

a)
240 cm
60 cm
b)
360 cm
60 cm
α = Angle d'inclinaison
β = Angle de pente
c)
A
360
S
α
β
O
60
B
INCLINAISON ET PENTE

Figure 1

Imaginons ensuite de l'incliner lentement, en la couchant jusqu'à ce qu'elle se trouve en position horizontale ; nous voyons alors que l'INCLINAISON AUGMENTE PROGRESSIVEMENT, tandis que la PENTE DIMINUE PROGRESSIVEMENT.

Lorsque l'échelle est couchée au sol, l'INCLINAISON EST MAXIMALE et la PENTE EST EGALE A ZERO.

Comme on le voit, l'inclinaison et la pente sont deux aspects distincts d'une même position. En outre, chaque fois que l'inclinaison augmente, la pente diminue.

Une fois établies, l'inclinaison et la pente d'un objet, étant donné qu'il existe un lien bien défini entre ces deux grandeurs, fixons-nous maintenant un critère de mesure pour l'une et pour l'autre.

Pour nous simplifier cette tâche, il faut représenter la position d'une échelle, par exemple celle de la Figure 1-b, par le segment OS, que l'on voit sur la Figure 1-c.

Ce segment rectiligne est incliné par rapport à l'axe vertical du système de référence, exactement comme l'échelle est inclinée par rapport à la verticale du mur ; en outre, par rapport à l'axe vertical, il présente la même pente que l'échelle par rapport au sol.

Nous observons maintenant que le segment forme avec l'axe vertical un angle α (on prononce alpha) et avec l'axe horizontal un angle β (on prononce bêta).

Le premier angle peut représenter l'inclinaison du segment, puisqu'il exprime la mesure du déplacement de ce segment par rapport à la position verticale ; on l'appelle donc ANGLE D'INCLINAISON.

Le second angle peut représenter la pente, puisqu'il exprime la mesure du déplacement du segment par rapport à la position horizontale ; on l'appelle donc ANGLE DE PENTE.

Il est facile d'imaginer comment ces angles se modifient, lorsqu'on fait tourner le segment autour du point O : si le segment tourne en direction de l'axe A, l'angle d'inclinaison α diminue et l'angle de pente β augmente ; inversement, si le segment tourne vers l'axe B, l'angle d'inclinaison augmente et l'angle de pente diminue.

Nous observons en outre que l'angle α EST TOUJOURS EGAL A LA DIFFERENCE ENTRE L'ANGLE DROIT FORME PAR DEUX AXES ET L'ANGLE β, puisqu'en ôtant du premier quadrant du système la partie délimitée par β, il reste la partie du quadrant délimitée par α.

Sur la base de cette dernière considération, nous pouvons déduire une formule mathématique très simple, qui nous permettra de calculer l'angle d'inclinaison si l'on connaît l'angle de pente.

Exprimons d'abord la relation existant entre les angles sous une forme concise ; nous dirons donc :

ANGLE D'INCLINAISON = ANGLE DROIT – ANGLE DE PENTE

Remplaçons maintenant les mots par les symboles et au lieu d'angle droit, indiquons la valeur de cet angle, qui est de 90^0, et nous aurons :

Formule 1) $\alpha = 90^0 - \beta.$

En faisant la même considération, nous trouverons aussi que l'ANGLE DE PENTE β EST TOUJOURS EGAL A LA DIFFERENCE ENTRE L'ANGLE DROIT, FORME PAR L'AXE DES ABSCISSES ET L'AXE DES ORDONNEES, ET L'ANGLE α D'INCLINAISON.

Donc, pour exprimer sous forme concise la relation entre les angles, on aura :

ANGLE DE PENTE = Angle DROIT – Angle d'INCLINAISON.

Remplaçons maintenant, comme nous l'avons fait avant, les mots par les symboles et écrivons au lieu d'angle droit, sa valeur de 90^0 ; nous obtiendrons :

Formule 2) $\beta = 90^0 - \alpha$.

Les deux formules que nous avons trouvées ainsi, doivent être équivalentes, puisqu'elles se réfèrent aux mêmes grandeurs (angle d'inclinaison α, angle de perte β, angle droit 90^0) et que d'autre part elles s'obtiennent en partant de deux considérations parfaitement logiques et semblables entre elles.

Nous pouvons contrôler maintenant l'équivalence entre les deux formules à l'aide d'un exemple numérique, en choisissant au hasard la valeur de β et en calculant la valeur de α.

Posons $\beta = 30^0$; en nous basant sur la formule 1, on calculera la valeur de α comme suit :

$$\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - 30^0 = 60^0.$$

Vérifions en calculant avec la seconde formule la valeur β à partir de la valeur de α :

$$\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 60 = 30^0.$$

Comme on le voit, après avoir effectué le calcul, la formule 2 est résolue par les mêmes valeurs que la formule 1.

Les deux formules s'avèrent donc effectivement équivalentes entre elles. Cette équivalence a pour effet que, si l'on veut exprimer la direction d'une droite, dans le diagramme cartésien, on peut faire appel indifféremment soit à l'angle d'inclinaison, soit à l'angle de pente : CONNAISSANT L'ANGLE DE PENTE, ON PEUT FACILEMENT CALCULER L'ANGLE D'INCLINAISON AU MOYEN DE LA FORMULE 1 ; d'autre part, CONNAISSANT L'ANGLE D'INCLINAISON, ON PEUT CALCULER FACI-

LEMENT L'ANGLE DE PENTE AU MOYEN DE LA FORMULE 2.

Habituellement, dans les problèmes d'électronique, on se réfère seulement à la pente des graphiques, car il reste sous-entendu qu'à partir de l'angle de pente, on peut passer à l'angle d'inclinaison au moyen de la Formule 1.

Toutefois, au cours de la présente leçon, nous continuerons à considérer alternativement l'une et l'autre grandeur, car, comme on le verra par la suite, chaque grandeur prend sa propre signification physique dans la représentation graphique.

1 - 1 - LE GRAPHIQUE DE LA LOI D'OHM

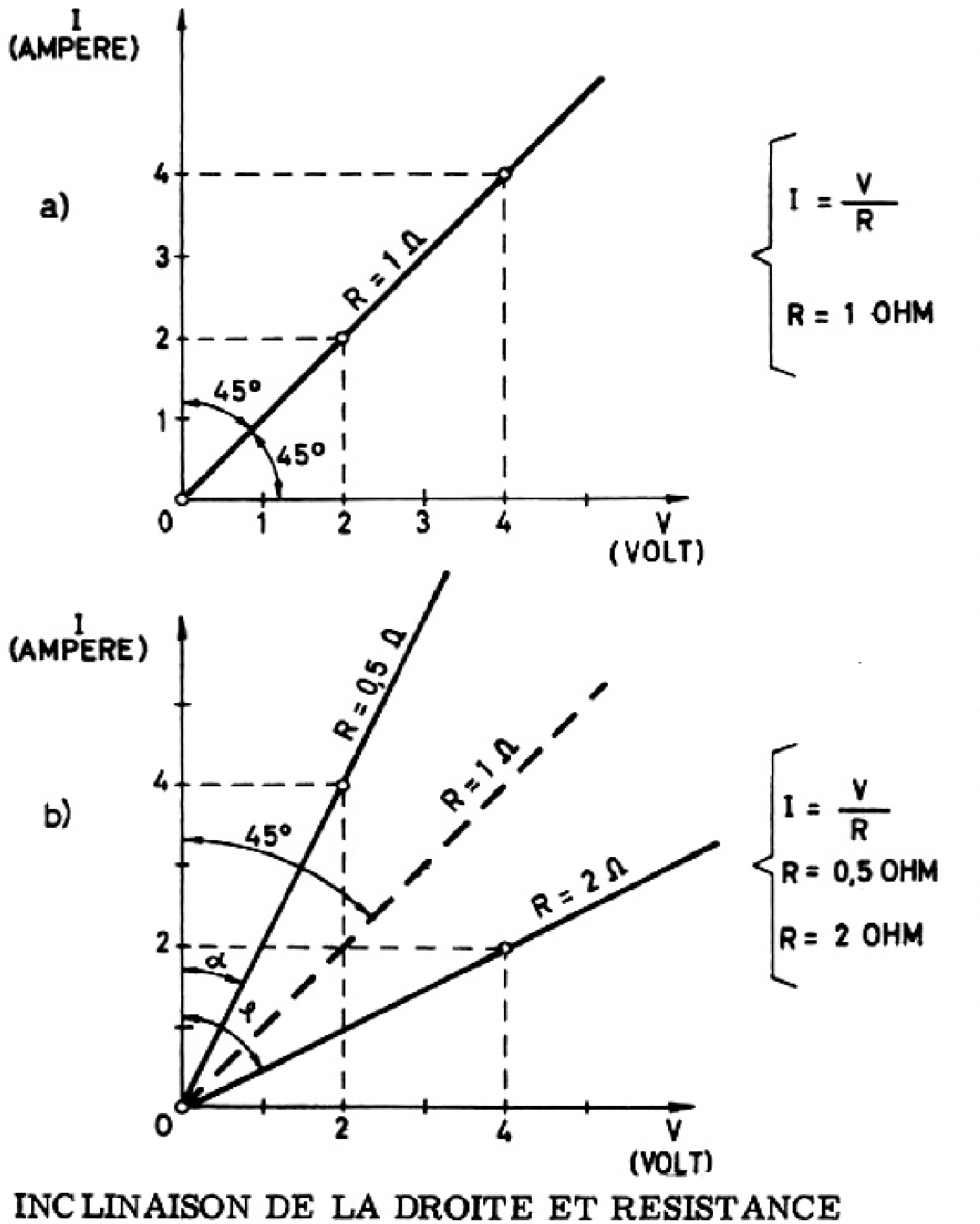
Revenons au graphique de la loi d'Ohm pour montrer par un exemple, la signification physique que l'inclinaison et la pente peuvent acquérir dans les diagrammes cartésiens.

Sur la Figure 2-a, est reporté le graphique déjà présenté sur la Figure 5 - Mathématiques 2. En observant ce graphique, on note qu'il forme un angle d'inclinaison de 45^o avec l'axe vertical et un angle de pente également de 45^o avec l'axe horizontal.

La coïncidence des deux valeurs n'est qu'un cas particulier, provenant du fait que les axes des ordonnées et des abscisses sont gradués à intervalles égaux et du fait que la valeur de la résistance introduite dans la formule d'Ohm est égale à l'unité de résistance, à savoir 1 ohm.

Pour mettre en valeur la signification physique de l'inclinaison et de la pente des graphiques dérivés de la loi d'ohm, il faut considérer deux autres cas, dans lesquels la valeur de la résistance est différente de l'unité ; par exemple 0,5 ohm et 2 ohms.

Construisons d'abord le graphique correspondant à la résistance de 0,5 ohm.



INCLINAISON DE LA DROITE ET RESISTANCE ELECTRIQUE

Figure 2

En premier lieu, il nous faut calculer, au moyen de la formule $I = V / R$, la valeur de l'intensité I qui doit passer dans la résistance R de 0,5 ohm, lorsqu'on applique à celle-ci une tension donnée V, par exemple de 2 volts.

En effectuant le calcul selon le procédé connu, qui a été étudié dans Mathématiques 1, on obtient ;

$$I = V / R \quad ; \quad I = 2 / 0{,}5 = 2 : 0{,}5 = 4 \text{ ampères.}$$

Les valeurs de tension (2 volts) et de l'intensité (4 ampères) étant déterminées, on cherche dans le diagramme cartésien (Figure 2-b), le point correspondant aux deux valeurs ; on trace ensuite le graphique en reliant le point trouvé à l'origine 0 du système.

On procède de la même façon pour construire le graphique correspondant à la résistance de 2 ohms.

En supposant la valeur de tension égale à 4 volts, on calcule la valeur de l'intensité :

$$I = V / R \quad ; \quad I = 4 / 2 = 2 \text{ ampères.}$$

Les valeurs de la tension et de l'intensité connues, on cherche sur le diagramme (Figure 2-b) le point correspondant et on trace le nouveau graphique en reliant le point trouvé à l'origine du système de référence.

Observons maintenant le diagramme de la Figure 2-b sur lequel sont tracés les deux graphiques précédents et où l'on a reporté, en pointillé, le graphique de la Figure 2-a.

La droite correspondant à 0,5 ohm forme, avec l'axe des ordonnées, un angle d'inclinaison α (alpha) inférieur à 45^{0}, c'est-à-dire inférieur à l'angle d'inclinaison correspondant à 1 ohm.

D'autre part, la droite correspondant à 2 ohms forme, avec l'axe des ordonnées, un angle φ (phi) supérieur à 45°. Par conséquent, si nous comparons les résistances aux angles d'inclinaison qui leur correspondent, nous trouvons que la plus faibles résistance (0,5 Ohm), correspond à l'angle le plus faible α, que la résistance moyenne (1 ohm) correspond à l'angle d'inclinaison de valeur moyenne (45°) et que la résistance la plus forte (2 ohms) correspond à l'angle le plus grand, φ.

Si nous généralisons la correspondance entre les résistances et les angles d'inclinaisons, on peut donc affirmer que :

A CHAQUE VALEUR DE RESISTANCE CORRESPOND UNE INCLINAISON BIEN DEFINIE DU GRAPHIQUE et que, QUAND LA RESISTANCE AUGMENTE, L'INCLINAISON AUGMENTE AUSSI.

La conclusion à laquelle nous sommes arrivés est valable en général à condition d'utiliser des diagrammes ayant le même système de référence, en représentant LES INTENSITES SUR L'AXE DES ORDONNEES ET LES TENSIONS SUR L'AXE DES ABSCISSES.

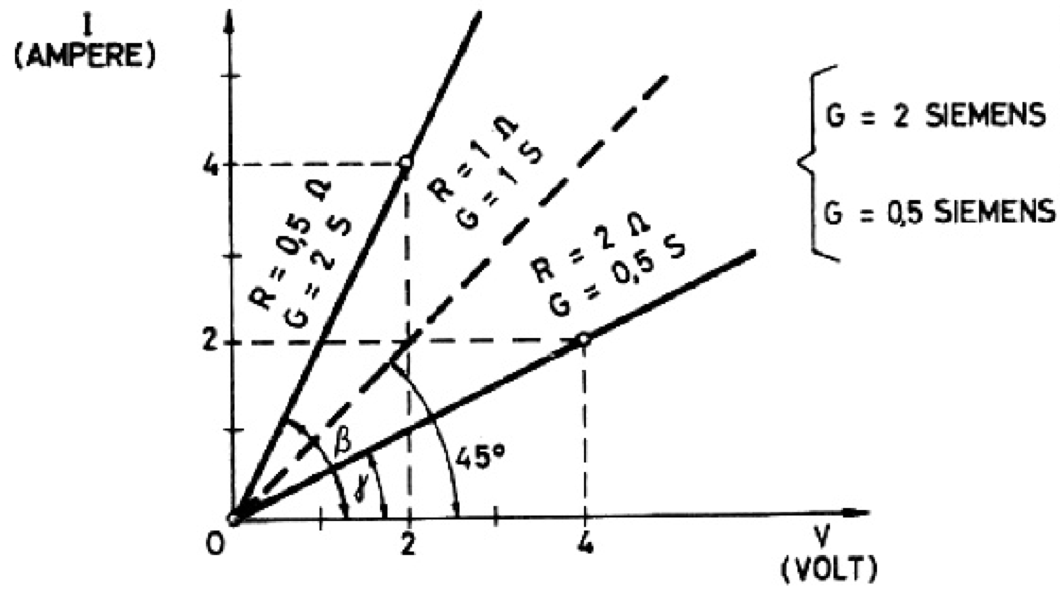
Dans ces conditions, l'inclinaison du graphique représente la résistance du circuit, prenant ainsi une signification physique précise.

D'après le graphique, on peut déterminer les valeurs de tension, en se référant à l'axe des abscisses, les valeurs d'intensité en se référant à l'axe des ordonnées et la valeur de la résistance en se référant à l'inclinaison.

Nous trouvons donc, dans ce graphique, toutes les grandeurs de la loi d'ohm, tout comme dans les trois formules étudiées au cours de la première leçon de Mathématiques.

Voyons maintenant quelle signification physique on peut attribuer à la pente des graphiques pris en considération précédemment.

A cette fin, il est montré, sur la Figure 3, le diagramme de la Figure 2-b en désignant par β (bêta) l'angle de pente supérieur à 45° et par γ (gam-



PENTE DE LA DROITE ET CONDUCTANCE ELECTRIQUE

Figure 3

ma) l'angle de pente inférieur à 45^0.

L'angle de pente β correspond, comme cela a été défini dans la première partie de la présente leçon, à l'angle d'inclinaison α (à savoir $\beta = 90^0 - \alpha$). De même, l'angle de pente γ correspond à l'angle d'inclinaison φ et l'angle de pente de 45^0 correspond à l'angle d'inclinaison de 45^0.

En considérant qu'à chaque pente correspond une seule et unique inclinaison bien définie et en se rappelant qu'à chaque inclinaison correspond une valeur de résistance, nous pourrions conclure en affirmant que la pente, tout comme l'inclinaison, peut représenter la résistance du circuit.

Toutefois cette conclusion ne peut être considérée comme valable, que si l'on garde présent à l'esprit que dans le système de référence choisi (abscisse = tension ; ordonnée = intensité), la pente indique la valeur inverse de la résistance, puisque l'angle de pente est d'autant plus petit que la résistance est plus grande.

En effet, il suffit d'observer qu'à la résistance de 0,5 ohm, correspond l'angle de pente de 45^{0} et quà la résistance de 2 ohms correspond l'angle inférieur à 45^{0}.

Donc, si nous voulons attribuer à la pente une signification précise, nous devons trouver une nouvelle grandeur électrique, dépendant de la résistance, mais diminuant lorsque celle-ci augmente et réciproquement, augmentant lorsque la résistance diminue.

La grandeur électrique qui présente cette propriété est la CONDUCTANCE.

LA CONDUCTANCE EST L'INVERSE DE LA RESISTANCE.

Par exemple, si la résistance est égale à 0,5 ohm, la conductance est égale est 1 : 0,5 , c'est-à-dire égale à 2 siemens.

De même, si la résistance est égale à 2 ohms, la conductance sera égale à 1 : 2, soit 0,5 siemens.

Enfin, si la résistance est égale à 1 ohm, la conductance sera égale à 1 : 1 ,soit 1 siemens.

En indiquant en général la valeur de la résistance par la lettre R et la valeur de la conductance par la lettre G, on peut résumer les calculs précédents par la formule suivante :

Formule 3) $G = 1 / R$.

En appliquant cette formule, on peut calculer la valeur de la conductance en l'exprimant en siemens, qui est son unité de mesure, lorsqu'on connaît la valeur de la résistance exprimée en ohms.

Après avoir défini comment on procède pour calculer la conductance, observons le diagramme de la Figure 3.

Dans cette figure, sous chaque valeur de résistance, se trouve indiquée la valeur respective de la conductance, soit R = 0,5 Ω et G = 2 S ; R = 1 Ω , et G = 1 S , R = 2 Ω et G = 0,5 S.

En confrontant les conductances aux pentes, on remarque que la plus grande conductance (2S) correspond à l'angle de pente le plus grand (β) et la conductance la plus petite (o,5 S) correspond à l'angle de pente le plus faible (γ).

En généralisant la correspondance entre pentres et conductances on peut donc affirmer que :

A CHAQUE VALEUR DE CONDUCTANCE CORRESPOND UNE PENTE BIEN DEFINIE DU GRAPHIQUE ET QUE LORSQUE LA CONDUCTANCE AUGMENTE, LA PENTE AUGMENTE AUSSI.

La nouvelle conclusion à laquelle nous sommes arrivés est valable en général, à condition d'utiliser des diagrammes avec le même système de référence, en REPRESENTANT LES INTENSITES SUR L'AXE DES ORDONNEES ET LES TENSIONS SUR L'AXE DES ABSCISSES.

Dans ces conditions, qui sont les mêmes que celles qui ont été précédemment établies pour l'inclinaison et la résistance, LA PENTE DU GRAPHIQUE REPRESENTE LA CONDUCTANCE DU CIRCUIT et prend ainsi une nouvelle signification physique très directe.

Comme nous l'avons déjà dit plus haut, on considère habituellement en électronique, la pente des graphiques, en négligeant l'inclinaison qui, comme on l'a déjà vu, peut être facilement calculée au moyen de la formule 1. Donc, en nous limitant à l'étude de la pente des graphiques, résumons brièvement les conclusions auxquelles nous sommes parvenus.

Dans un diagramme dans lequel on représente la loi d'Ohm, en indiquant les tensions sur l'axe des abscisses et les intensités sur l'axe des ordonnées, on peut tracer autant de graphiques qu'il y a de valeurs de résistance, à savoir une pour chaque circuit donné.

Si, en passant d'un graphique à l'autre on constate une augmentation de la pente, il faut faire correspondre à cette augmentation, une diminution de la résistance et une augmentation de la conductance.

Si, inversement, on constate une diminution de la pente, il faut faire correspondre à cette diminution, une augmentation de la résistance et une diminution de la conductance.

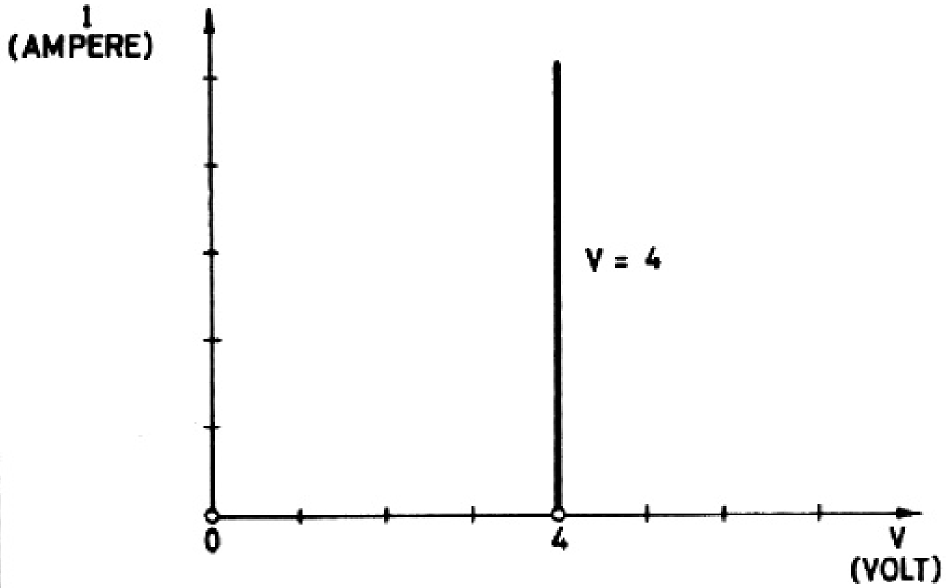
Le lien précité entre pente et résistance, ou entre pente et conductance, est toujours valable, même lorsqu'il ne s'agit pas de la loi d'Ohm, mais d'une autre loi, liant entre elles la tension, représentée sur l'axe des abscisses et l'intensité représentée sur l'axe des ordonnées.

Considérons par exemple le graphique de la Figure 4.

La droite verticale, indique que la tension est toujours la même, (4 volts), quelle que soit l'intensité du courant émis dans le circuit. Ces conditions se produisent dans le cas idéal d'une pile ayant une résistance interne égale à zéro, alimentant successivement des circuits présentant des valeurs de résistance diverses.

Puisqu'on a supposé que la résistance interne de la pile était égale à zéro, on peut considérer que la chute de tension entre les bornes de cette pile est, également, égale à zéro. La tension de la pile reste donc constante quelle que soit la valeur de l'intensité.

Observons le graphique. Il présente une pente maximale puisqu'il est constitué par une droite verticale. On doit donc conclure que la pente représente une résistance nulle, égale à zéro, qui est justement la résistance interne du générateur à tension constante.



DROITE VERTICALE (Tension constante)

Figure 4

On peut faire des considérations analogues en observant le graphique de la Figure 5.

Dans celui-ci, l'intensité est toujours la même tandis que la tension peut prendre n'importe quelle valeur : c'est le cas idéal de certains circuits électroniques.

Dans cet exemple, la pente du graphique est égale à zéro, puisqu'elle est horizontale comme l'axe des abscisses. On en déduit donc que le générateur à courant constant, doit avoir une résistance maximale, c'est-à-dire une résistance interne infinie.

Arrêtons maintenant l'étude des graphiques pour passer à d'autres sujets de mathématiques. Nous reprendrons par la suite, cette étude, en considérant les graphiques formés par des lignes à pente variable.

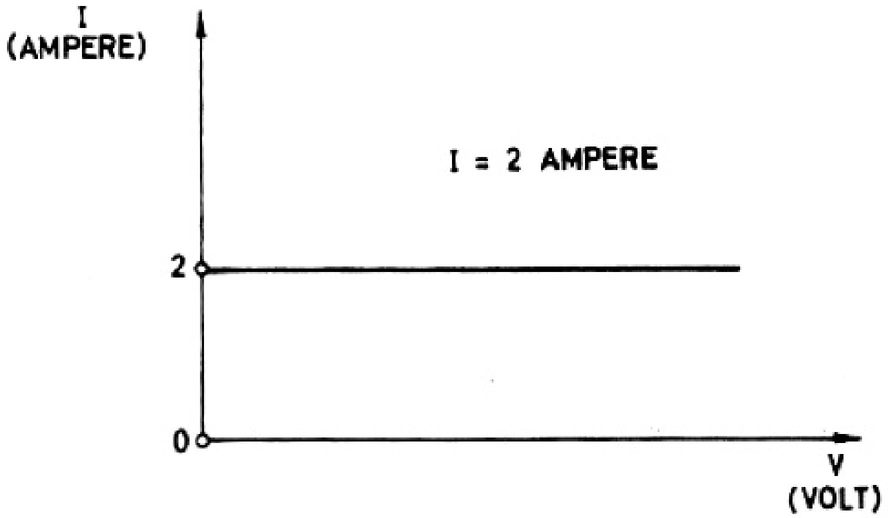
2 – COMPLEMENTS D'ARITHMETIQUE : LES FRACTIONS

Les expressions arithmétiques, obtenues à partir des formules, sont parfois très simples, comme dans les trois cas de la loi d'ohm. Parfois, elles sont un peu plus complexes que celles que nous avons étudiées jusqu'à présent.

Toutefois, les expressions les plus complexes peuvent presque toujours être réduites à une succession d'opérations élémentaires.

Evidemment, les calculs que l'on doit effectuer pour trouver la valeur d'une expression formée par de nombreuses opérations, exigent plus d'attention. En outre, ils doivent être effectués l'un après l'autre dans un ordre bien défini.

L'ordre à suivre dans les calculs doit être déterminé selon le cas.



DROITE HORIZONTALE (Intensité constante)

Figure 5

On effectue d'abord les opérations qui paraissent indépendantes des autres, ensuite, en utilisant les résultats des opérations effectuées, on passe au calcul des opérations restantes.

Pour nous fixer les idées sur ces procédés, considérons trois exemples d'expressions numériques de complexités diverses, dérivées de formules de l'électronique.

Exemple 1

Pour calculer la conductance de deux résistances R 1 et R 2, connectées en parallèle, on utilise la formule :

$$G = 1 / R1 + 1 / R2$$

En supposant que R 1 = 10 ohms et R 2 = 50 ohms, on calcule la valeur de la conductance G de la façon suivante :

$$G = 1 / R1 + 1 / R2 =$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{50} = 0,1 + 0,02 = 0,12 \text{ siemens}$$

Comme on peut le remarquer, les opérations indiquées par la formule sont au nombre de 3 : deux divisions (1 : 10;1:50) et une addition. Pour calculer la valeur de l'expression arithmétique, c'est-à-dire, pour déterminer la valeur de la conductance, on a dû effectuer d'abord les deux divisions et ensuite l'addition.

Exemple 2

Pour calculer la force électromotrice d'un générateur électrique, connaissant la résistance R du circuit extérieur connecté au générateur, la résistance interne de ce même générateur et la tension V à ses bornes, on applique la formule suivante :

$$E = V + r \times \frac{V}{R}$$

En supposant V = 6 volts, R = 10 ohms et r = 0,5 ohm, on calcule la valeur de la force électromotrice E de la manière suivante :

$$E = V + r \times \frac{V}{R} =$$

$$6 + 0{,}5 \times \frac{6}{10} = 6 + 0{,}5 \times 0{,}6 = 6 + 0{,}3 = 6{,}3 \text{ volts.}$$

Dans ce cas, les opérations indiquées par la formule sont toujours au nombre de trois : une division, une multiplication et une addition. Pour calculer la valeur de l'expression numérique on a dû effectuer d'abord la division, ensuite la multiplication et enfin l'addition.

Exemple 3

Pour calculer la résistance équivalente de deux résistances connectées en parallèle R 1 et R2, on utilise la formule suivante :

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R\,1} + \frac{1}{R\,2}}$$

En posant R 1 = 25 ohms et R 2 = 50 ohms, la valeur de la résistance équivalente R_e se calcule de la façon suivante :

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R\,1} + \frac{1}{R\,2}} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{25}+\frac{1}{50}} = \frac{1}{0{,}04 + 0{,}02} = \frac{1}{0{,}06} = 16{,}66 \text{ ohms}$$

Ici les opérations sont au nombre de quatre : deux divisions, une addition et enfin une autre division. D'abord on a effectué les divisions 1:25 et 1:50, puis on a additionné les quotients.

Enfin, on a effectué la dernière division entre le dividende 1 et le diviseur 0,06 qui est la somme obtenue par l'addition précédente.

Dans les trois expressions que nous venons de calculer, on note la présence de nombreuses divisions, exprimées dans la forme qui a déjà été adoptée pour la première et la troisième formule de la loi d'Ohm, étudiée dans "Mathématiques 1".

Les divisions exprimées sous cette forme, à savoir en utilisant une ligne horizontale en guise de signe de la division et en mettant le dividende au-dessus de cette ligne et le diviseur en-dessous, s'appellent dans le langage mathématique, des FRACTIONS.

Les fractions apparaissent souvent dans les expressions arithmétiques dérivant des formules et parfois, comme dans l'exemple 3 que nous venons de considérer, elles prennent un aspect assez complexe, d'où peuvent surgir des difficultés de calculs pour les personnes peu entraînées aux mathématiques.

Nous allons donc nous arrêter brièvement sur les calculs qu'il est nécessaire d'effectuer, lorsqu'on trouve des fractions dans une expression arithmétique.

2 - 1 - CALCUL DES FRACTIONS

Chaque fraction est toujours formée de deux termes : le dividende, que l'on appelle le NUMERATEUR, qui se trouve au-dessus de la barre.

Le diviseur, appelé DENOMINATEUR, se trouve en-dessous de la barre.

Dans les cas les plus simples, le numérateur et le dénominateur sont deux nombres isolés et le calcul consiste simplement à effectuer une division ordinaire entre deux nombres.

Il existe toutefois des cas plus complexes : le numérateur est formé par une expression arithmétique dans laquelle il faut effectuer plusieurs opérations.

De même il peut se produire que le dénominateur ou le numérateur et le dénominateur, soient formés par des expressions arithmétiques.

Dans tous les cas, pour trouver la valeur de la fraction, c'est-à-dire, pour diviser le numérateur par le dénominateur, il faut d'abord calculer les EXPRESSIONS ARITHMETIQUES QUI SE TROUVENT AU-DESSUS ET EN-DESSOUS DE LA BARRE DE FRACTION.

Exemple :

Trouver la valeur de la fraction $\dfrac{15 \times 3 + 72 - 51}{\frac{3}{2} + 4{,}5 - 2}$

Calculons d'abord la valeur du numérateur :

$15 \times 3 + 72 - 51 = 45 + 72 - 51 = 117 - 51 = 66$

Calculons maintenant la valeur du dénominateur :

$\frac{3}{2} + 4{,}5 - 2 = 1{,}5 + 4{,}5 - 2 = 4.$

Calculons enfin la valeur de la fraction en divisant le numérateur (66) par le dénominateur (4) :

$66 : 4 = 16{,}5$

Par ce procédé, toutes les fractions arithmétiques même les plus complexes, peuvent se réduire à une simple division entre deux nombres.

Après avoir résolu la première et la plus importante des difficultés que l'on peut rencontrer dans le calcul des fractions, essayons maintenant de simplifier d'autres calculs dans lesquels apparaissent deux ou plusieurs fractions simples.

A cette fin, il convient de mettre en relief une propriété commune à toutes les fractions.

PROPRIETE FONDAMENTALE DES FRACTIONS :

EN MULTIPLIANT OU EN DIVISANT LE NUMERATEUR ET LE DENOMINATEUR D'UNE FRACTION PAR UN MEME NOMBRE, ON NE CHANGE PAS LA VALEUR DE LA FRACTION.

Vérifions cette propriété par quelques exemples.

Exemples :

- Multiplions le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{1}{2}$ d'abord par 2 et ensuite par 10, et enfin, par 55,5

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} \quad ; \quad \frac{1 \times 10}{2 \times 10} = \frac{10}{20} \quad ; \quad \frac{1 \times 55,5}{2 \times 55,5} = \frac{55,5}{111}$$

- Effectuons maintenant les divisions de $\frac{1}{2}$ et de chaque fraction obtenue :

$1 : 2 = 0,5$; $2 : 4 = 0,5$; $10 : 20 = 0,5$; $55,5 : 111 = 0,5$.

Comme on le voit, les valeurs des quatre fractions sont égales, et ceci confirme la propriété énoncée ci-dessus, puisque les trois fractions ont été obtenues en multipliant successivement le numérateur et le dénominateur de la première par des nombres égaux.

Divisons maintenant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{210}{150}$ d'abord par 2, ensuite par 3 et enfin par 5.

$$\frac{210 : 2}{150 : 2} = \frac{105}{75} \quad ; \quad \frac{210 : 3}{150 : 3} = \frac{70}{50} \quad ; \quad \frac{210 : 5}{150 : 5} = \frac{42}{30}$$

Effectuons les divisions indiquées par la fraction $\frac{210}{150}$ et par les trois fractions obtenues à partir de celle-ci :

$210 : 150 = 1{,}4 \quad ; \quad 105 : 75 = 1{,}4 \quad ; \quad 70 : 50 = 1{,}4.$

On voit immédiatement que dans ce cas aussi, les valeurs des fractions sont égales. Nous pouvons donc considérer que la propriété fondamentale attribuée aux fractions est confirmée sous tous ses aspects.

DEUX REGLES DERIVENT DE CETTE PROPRIETE : l'une destinée à simplifier le numérateur et le dénominateur, en conservant la valeur de la fraction inchangée ; l'autre que l'on utilise pour effectuer directement la somme et la soustraction de deux ou plusieurs fractions, en évitant de calculer les valeurs respectives.

REGLE 1 :

LORSQUE LES TERMES D'UNE FRACTION SONT CONSTITUES PAR DES NOMBRES DECIMAUX, ON PEUT TRANSFORMER LES DEUX TERMES (numérateur et dénominateur) EN DES NOMBRES ENTIERS, en les multipliant par 10 autant de fois qu'il y a de décimales dans le nombre le plus élevé de chiffres après la virgule.

D'autre part, lorsque les termes d'une fraction sont divisibles par un même nombre entier, ON PEUT SIMPLIFIER LA FRACTION en divisant le numérateur et le dénominateur par ce même nombre.

La règle est basée sur la propriété fondamentale des fractions, puisque, lorsqu'on multiplie ou on divise les deux termes de la fraction par un même nombre, la valeur de la fraction ne change pas.

Exemples :

Mettre sous forme simplifiée les fractions suivantes :

$$\frac{0,1}{0,5} \; ; \; \frac{0,015}{0,0031} \; ; \; \frac{0,23}{0,03} \; ; \; \frac{2,01}{0,37} \; ; \; \frac{0,0001}{0,021} \; ; \; \frac{209,3}{30,7} \; ; \; \frac{90,01}{0,07}$$

$$\frac{6}{10} \; ; \; \frac{32}{64} \; ; \; \frac{300}{900} \; ; \; \frac{81}{273} \; ; \; \frac{72}{216} \; ; \; \frac{625}{1200} \; ; \; \frac{4680}{18009} \; ; \; \frac{154}{231}$$

Observons les sept premières fractions. Elles sont toutes constituées par des chiffres décimaux. Par conséquent, en suivant la règle énoncée, multiplions par 10 le numérateur et le dénominateur de chacune d'elles autant de fois qu'il le faudra, pour obtenir deux nombres entiers :

$$\frac{0,1 \times 10}{0,5 \times 10} = \frac{1}{5} \; ; \; \frac{0,015 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{0,0031 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{150}{31}$$

$$\frac{0,23 \times 10 \times 10}{0,03 \times 10 \times 10} = \frac{23}{3} \; ; \; \frac{2,01 \times 10 \times 10}{0,37 \times 10 \times 10} \; \frac{201}{37}$$

$$\frac{0,0001 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{0,021 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{210} \quad \frac{209,3 \times 10}{30,7 \times 10} = \frac{2093}{307}$$

$$\frac{90,01 \times 10 \times 10}{0,07 \times 10 \times 10} = \frac{9001}{7}$$

Observons maintenant les huit autres fractions. Le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions s'avèrent divisibles une ou plusieurs fois par les mêmes nombres. Effectuons donc les simplifications indiquées par la règle.

A cette fin, pour rendre les calculs plus aisés, écrivons le numérateur et le dénominateur l'un à côté de l'autre sur la même ligne. Puis, traçons une barre verticale à côté du dénominateur. Ecrivons ensuite à droite de cette barre, le premier diviseur commun en nous limitant à considérer les diviseurs communs 10, 2, 3, 5 , 7 , 11, dans le même ordre dans lequel ils vienent d'être cités.

Après avoir effectué la division du numérateur par le diviseur commun choisi, nous écrirons le résultat sous le numérateur. De même, après avoir divisé le dénominateur par ce même diviseur, nous écrirons le résultat sous le dénominateur.

On appliquera le même procédé de division sur les deux résultats dans le cas où ils apparaîtront encore divisibles par un même nombre, et, s'il le faut, on continuera sur les résultats suivants.

Les derniers résultats qui ne seront plus divisibles par un même nombre, constitueront respectivement le numérateur et le dénominateur de la fraction simplifiée.

Voici le procédé suivi pour chacune des huit fractions.

1)	$\frac{6}{10}$	6/10	2	$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
		6/5		
2)	$\frac{32}{64}$	32 / 64	2	$\frac{32}{64} = \frac{1}{2}$
		16 / 32	2	
		8/ 16	2	
		4 / 8	2	
		2 / 4	2	
		1/2		

3) $\frac{300}{900}$

300 / 900	10
30 / 90	10
3 / 9	
1 / 3	

$$\frac{300}{900} = \frac{1}{3}$$

4) $\frac{81}{273}$

81 / 273	3
27 / 91	

$$\frac{81}{273} = \frac{27}{91}$$

5) $\frac{72}{216}$

72 / 216	2
36 / 108	2
18 / 54	2
9 / 27	3
3 / 9	3
1 / 3	

$$\frac{72}{216} = \frac{1}{3}$$

6) $\frac{625}{1200}$

625 / 1200	5
125 / 240	5
25 / 48	

$$\frac{625}{1200} = \frac{25}{48}$$

7) $\frac{4680}{18009}$

4680 / 18009	3
1560 / 6003	3
520 / 2001	

$$\frac{4680}{18009} = \frac{520}{2001}$$

8) $\frac{154}{231}$

154 / 231	7
22 / 33	11
2 / 3	

$$\frac{154}{231} = \frac{2}{3}$$

Les deux procédés de calculs qui viennent d'être décrits ne permettent pas toujours de simplifier au maximum les fractions. Toutefois, on peut les considérer très utiles dans la majorité des cas pratiques.

Voyons maintenant l'autre règle qui permet d'additionner ou de soustraire directement deux ou plusieurs fractions.

REGLE 2

LORSQUE DEUX OU PLUSIEURS FRACTIONS ONT DES DENOMINATEURS EGAUX, LEUR SOMME EST CONSTITUEE PAR UNE FRACTION AYANT POUR NUMERATEUR LA SOMME DES NUMERATEURS, ET POUR DENOMINATEUR LE DENOMINATEUR COMMUN.

LORSQUE DEUX FRACTIONS ONT DES DENOMINATEURS EGAUX, LEUR DIFFERENCE EST CONSTITUEE PAR UNE FRACTION AYANT POUR NUMERATEUR LA DIFFERENCE DES NUMERATEURS ET POUR DENOMINATEUR LE DENOMINATEUR COMMUN.

Exemple :

Addition de fractions ayant le même dénominateur :

$$\frac{2}{3} + \frac{40}{3} + \frac{7\ 5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{9{,}5}{3} = \frac{2 + 40 + 7{,}5 + 1 + 9{,}5}{3} = \frac{60}{3} = 20\ ;$$

$$\frac{6}{5} + \frac{0{,}6}{5} + \frac{67}{5} + \frac{9{,}4}{5} = \frac{6 + 0{,}6 + 67 + 9{,}4}{5} = \frac{83}{5}$$

Soustraction de fractions ayant le même dénominateur :

$$\frac{323{,}07}{11} - \frac{23{,}07}{11} = \frac{323{,}07 - 23{,}07}{11} = \frac{300}{11}\ ;$$

$$\frac{6\ 231}{77} - \frac{6\ 154}{77} = \frac{6\ 231 - 6\ 154}{77} = \frac{77}{77} = 1.$$

La Régle 2 peut être étendue à toutes les fractions, en transformant les fractions ayant des dénominateurs différents en fractions ayant le même dénominateur.

A cette fin, il convient de compléter la règle précédente de la façon suivante.

REGLE 2 Bis

SI LES FRACTIONS A ADDITIONNER OU A SOUSTRAIRE ONT DES DENOMINATEURS DIFFERENTS, ON PEUT TOUJOURS LES REDUIRE AU MEME DENOMINATEUR en multipliant les deux termes de chaque fraction par un nombre à déterminer pour chaque cas.

L'extension de la règle est basée directement sur la propriété fondamentale des fractions, elle est donc valable en général, pour les additions et les soustractions à deux ou plusieurs termes.

Toutefois, nous nous limiterons ici à considérer les opérations à deux termes, parce que dans ce cas, l'utilité de la règle est particulièrement évidente, et son application plus facile.

Lorsqu'on doit effectuer une addition de deux fractions, ou une soustraction, il faut, en premier lieu, SIMPLIFIER LES FRACTIONS en appliquant la Règle 1 ; on multiplie les deux termes de la première fraction simplifiée par le dénominateur de la seconde fraction simplifiée ; enfin, on multiplie les deux termes de la seconde fraction simplifiée par le dénominateur de la première fraction simplifiée.

Par ce procédé, on obtient toujours deux nouvelles fractions ayant la même valeur que les premières et ayant des dénominateurs égaux : donc en opérant sur les fractions obtenues, on pourra calculer immédiatement la somme ou la différence en se basant sur la Règle 2.

Exemples :

Additions de fractions ayant des dénominateurs différents :

1) $\frac{2}{6} + \frac{3}{15}$

En simplifiant les deux fractions, on obtient :

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

En réduisant les fractions simplifiées au même dénominateur et en les additionnant, on obtiendra :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{5 + 3}{15} = \frac{8}{15}$$

2) $\frac{32}{10} + \frac{1}{16}$

En simplifiant les fractions, on obtient :

$\frac{32}{10} = \frac{16}{5} \qquad \frac{1}{16}$ (reste inchangée puisque cette fraction est déjà donnée sous une forme simplifiée).

En réduisant au même dénominateur et en additionnant on aura :

$$\frac{16}{5} + \frac{1}{16} = \frac{16 \times 16}{5 \times 16} + \frac{1 \times 5}{16 \times 5} = \frac{256}{80} + \frac{5}{80} = \frac{256 + 5}{80} = \frac{261}{80}$$

Soustraction présentant des dénominateurs différents :

1) $\frac{396}{26} - \frac{43}{2}$

En simplifiant la première fraction, on aura :

1) $\frac{396}{26} = \frac{198}{13}$

En réduisant au même dénominateur et en effectuant la soustraction on obtient :

$$\frac{198}{13} - \frac{43}{2} = \frac{198 \times 2}{13 \times 2} - \frac{43 \times 13}{2 \times 13} = \frac{396}{26} - \frac{559}{26} = \frac{396 - 559}{26}$$

Arrivés à ce point du calcul, en nous rappelant les soustractions des nombres relatifs étudiés dans la leçon de Mathématiques 2, nous procéderons de la façon suivante :

$559 - 396 = 163$; d'où $\frac{396 - 559}{26} = \frac{-163}{26}$ (valeur négative).

Le fait que la soustraction ait donné un résultat négatif, indique que le premier nombre est inférieur au second. Dans ce cas particulier on peut conclure en affirmant que la valeur de la fraction $\frac{43}{2}$ est plus grande que la valeur de la fraction $\frac{396}{26}$.

2) $\frac{21}{27} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7 - 1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Dans ce dernier exemple, il n'a pas été nécessaire de recourir à l'opération de réduction au même dénominateur parce qu'après la simplification de la fraction $\frac{21}{27}$ en $\frac{7}{9}$, les deux termes de soustraction se trouvent déjà être des fractions ayant le même dénominateur, soit 9.

Observons que la différence $\frac{6}{9}$ peut être simplifiée immédiatement en la réduisant à $\frac{2}{3}$ conformément à la Régle 1.

3) $\frac{3}{4} - \frac{5}{7}$

Ces deux fractions sont déjà exprimées sous une forme simplifiée, donc, en les réduisant directement au même dénominateur et en calculant la différence on aura :

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{3x7}{4x7} - \frac{5x4}{7x4} = \frac{21}{28} - \frac{20}{28} = \frac{21-20}{28} = \frac{1}{28}$$

Pour compléter les notions essentielles, nécessaires au calcul des fractions il nous reste à voir comment on effectue les multiplications et les divisions.

Ces deux opérations s'effectuent plus facilement que l'addition et la soustraction, parce qu 'elles n'exigent pas la réduction au même dénominateur.

Considérons d'abord la multiplication ; la règle suivante doit être appliquée.

REGLE 3

SI L'ON DOIT MULTIPLIER UNE FRACTION PAR UN NOMBRE, ON MULTIPLIE LE NUMERATEUR DE LA FRACTION PAR LE NOMBRE

DONNE. SI L'ON DOIT MULTIPLIER DEUX OU PLUSIEURS FRACTIONS ENTRE ELLES, ON MULTIPLIE RESPECTIVEMENT LES NUMERATEURS ENTRE EUX ET LES DENOMINATEURS ENTRE EUX.

Exemples :

Multiplications de fractions par des nombres (avec simplification des résultats) :

$$\frac{37}{43} \times 15 = \frac{37 \times 15}{43} = \frac{555}{43}$$

$$\frac{7}{11} \times 0,6 = \frac{7 \times 0,6}{11} = \frac{4,2}{11} = \frac{42}{110} = \frac{21}{55}$$

$$\frac{341}{4} \times 6 = \frac{341 \times 6}{4} = \frac{2046}{4} = \frac{1023}{2}$$

$$\frac{1}{13} \times 13 = \frac{1 \times 13}{13} = \frac{13}{13} = 1.$$

$$\frac{2}{33} \times 33 = \frac{2 \times 33}{33} = \frac{66}{33} = 2$$

Observons les deux derniers exemples : les résultats finals sont égaux au numérateur de la fraction. Des cas de ce genre se produisent lorsque le dénominateur de la fraction et le nombre qui la multiplie sont égaux ; dans ce cas on n'effectue pas les calculs, mais on transcrit simplement le numérateur qui est alors le résultat de l'opération.

Multiplications de deux, ou plusieurs fractions entre elles (avec simplification des résultats) :

$$\frac{15}{21} \times \frac{14}{31} = \frac{15 \times 14}{21 \times 31} = \frac{210}{651} = \frac{70}{217} = \frac{10}{31}$$

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 2 \times 4}{5 \times 7 \times 5} = \frac{8}{175}$$

$$\frac{2}{63} \times \frac{63}{5} = \frac{2 \times 63}{63 \times 5} = \frac{126}{315} = \frac{42}{105} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{22}{47} \times \frac{49}{22} = \frac{22 \times 49}{47 \times 22} = \frac{1078}{1034} = \frac{539}{517} = \frac{539:11}{517:11} = \frac{49}{47}$$

$$\frac{2}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{2 \times 3 \times 1 \times 7}{7 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{42}{168} = \frac{21}{84} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

Observons les multiplications des numérateurs et des dénominateurs dans les trois derniers exemples : dans les fractions

$$\frac{2 \times 63}{63 \times 5} \; ; \; \frac{22 \times 49}{47 \times 22} \; ; \; \frac{2 \times 3 \times 1 \times 7}{7 \times 2 \times 3 \times 4}$$

On remarque que certains nombres se trouvent tant dans le numérateur que dans le dénominateur, par exemple 63 dans la première fraction, 22 dans la deuxième, 2, 3 et 7 dans la troisième.

Dans des cas de ce genre, LORSQUE LES MEMES FACTEURS FIGURENT DANS LE NUMERATEUR ET LE DENOMINATEUR, ON SIMPLIFIE LES EXPRESSIONS EN SUPPRIMANT LES FACTEURS EGAUX, puis, on termine le calcul en ne conservant que les facteurs restants.

Dans les trois exemples cités, en supprimant les facteurs égaux, on obtient immédiatement les résultats finals des multiplications.

A ce propos, il faut observer que les simplifications peuvent s'effectuer également lorsque le numérateur ou le dénominateur ou les deux termes de la fraction, sont formés d'expressions arithmétiques contenant des nombres à additionner, à condition que le nombre que l'on désire supprimer figure dans chaque terme à additionner.

Considérons par exemple la fraction : $\dfrac{8 \times 3 + 7 \times 3}{5 \times 3}$

L'expression qui se trouve à la place du numérateur est constituée par une addition de deux termes. Chacun de ces termes contient le facteur 3 ; on pourra donc simplifier la fraction de la manière suivante :

$$\frac{8 \times 3 + 7 \times 3}{5 \times 3} = \frac{8 + 7}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Comme on le voit, on a simplement supprimé le nombre 3 dans le dénominateur et dans les deux termes à additionner du numérateur.

Si toutefois le facteur 3 n'avait figuré que dans un seul des deux termes à additionner, la simplification n'aurait pas été possible. Par exemple, pour calculer la valeur de la fraction $\dfrac{8 \times 2 + 7 \times 3}{5 \times 3}$ il faut effectuer toutes les opérations indiquées :

$$\frac{8 \times 2 + 7 \times 3}{5 \times 3} = \frac{16 + 21}{15} = \frac{37}{15}$$

Voyons maintenant le calcul des divisions.

REGLE 4 :

SI L'ON DOIT DIVISER UNE FRACTION PAR UN NOMBRE, ON MULTIPLIE LE DENOMINATEUR DE LA FRACTION PAR LE NOMBRE DONNE.

SI L'ON DOIT DIVISER UNE FRACTION PAR UNE AUTRE FRACTION, ON MULTIPLIE LE NUMERATEUR DE LA PREMIERE PAR LE DENOMINATEUR DE LA SECONDE ET LE DENOMINATEUR DE LA PREMIERE PAR LE NUMERATEUR DE LA SECONDE.

SI L'ON DOIT DIVISER UN NOMBRE PAR UNE FRACTION, ON MULTIPLIE LE NOMBRE DONNE PAR LE DENOMINATEUR DE LA FRACTION ET ON DIVISE LE PRODUIT OBTENU PAR LE NUMERATEUR.

Exemples :

Divisions de fractions par des nombres (avec simplification des résultats).

$$\frac{7}{333} : 11 = \frac{7}{333 \times 11} = \frac{7}{3663}$$

$$\frac{0,5}{1,3} : 10 = \frac{0,5}{1,3 \times 10} = \frac{0,5}{13} = \frac{5}{130} = \frac{1}{26}$$

$$\frac{25}{12,5} : 2 = \frac{25}{12,5 \times 2} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{32}{57} : 32 = \frac{32}{57 \times 32} = \frac{32}{1824} = \frac{16}{912} = \frac{8}{456} = \frac{4}{228} = \frac{2}{114} = \frac{1}{57}$$

Observons le dernier exemple : le résultat final est constitué par une fraction ayant pour numérateur 1 et pour dénominateur le dénominateur de la fraction que l'on voulait diviser par 32, c'est-à-dire 57.

Des cas de ce genre se produisent lorsque le numérateur de la fraction donnée et le nombre par lequel on veut la diviser, sont égaux ; dans ces cas, il convient d'écrire le résultat sans effectuer les calculs parce qu'on obtiendra toujours pour résultat, une fraction ayant le même dénominateur que la fraction posée et un numérateur égal à 1.

Divisions de fractions par des fractions (avec simplification des résultats).

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{7} = \frac{4 \times 7}{9 \times 2} = \frac{28}{18} = \frac{14}{9}$$

$$\frac{0,07}{15} : \frac{9}{100} = \frac{0,07 \times 100}{15 \times 9} = \frac{7}{135}$$

$$\frac{42}{0,3} : \frac{4}{0,1} = \frac{42 \times 0,1}{0,3 \times 4} = \frac{4,2}{1,2} = \frac{42}{12} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{93}{4} : \frac{93}{8} = \frac{93 \times 8}{4 \times 93} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{63}{42} : \frac{7}{42} = \frac{63 \times 42}{42 \times 7} = \frac{63}{7} = 9$$

Dans les deux derniers exemples, on a immédiatement simplifié les facteurs égaux, 93 et 42 respectivement, en appliquant le même procédé qui avait déjà été indiqué pour effectuer le calcul des multiplications.

Divisions de nombres par des fractions (avec simplification des résultats).

$$15 : \frac{2}{3} = \frac{15 \times 3}{2} = \frac{45}{2}$$

$$2{,}4 : \frac{5}{10} = \frac{2{,}4 \times 10}{5} = \frac{24}{5}$$

$$38 : \frac{0{,}2}{11} = \frac{38 \times 11}{0{,}2} = \frac{418}{0{,}2} = \frac{4180}{2} = 2090$$

$$161 : \frac{1}{3} = \frac{161 \times 3}{1} = 483$$

$$\frac{2}{\frac{1}{3}} = \frac{2 \times 3}{1} = 6$$

$$\frac{0{,}5}{\frac{2}{8}} = \frac{0{,}5 \times 8}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{36}{\frac{9}{7}} = \frac{36 \text{x} 7}{9} = \frac{9 \text{x} 4 \text{x} 7}{9} = 4 \text{x} 7 = 28$$

Dans le dernier exemple, nous avons employé un petit stratagème qui nous a permis d'abréger les calculs : au lieu de 36, nous avons écrit 9x4 (dont le produit est justement 36).

Ainsi nous avons pû simplifier en supprimant 9 dans le numérateur et 9 dans le dénominateur, réduisant de cette manière les opérations à une multiplication très simple.

On emploiera des astuces de ce genre chaque fois que la décomposition d'un nombre en plusieurs facteurs permettra d'obtenir un nouveau facteur égal à l'un des facteurs se trouvant dans l'autre terme de la fraction.

Exemples

$$\frac{25 \text{ x } 42}{7 \text{ x } 3} = \frac{25 \text{ x } 7 \text{ x } 6}{7 \text{ x } 3} = \frac{25 \text{ x } 6}{3} = \frac{150}{3} = 50$$

$$\frac{4 \text{ x } 81}{9} = \frac{4 \text{x} 9 \text{x} 9}{9} = 4 \text{ x } 9 = 36$$

Par ces exemples de calcul, nous allons clore le chapitre des fractions numériques. Dans la prochaine leçon de mathématiques, nous étudierons l'élévation à une puissance, l'extraction de racine et les logarithmes des nombres.

EXERCICE DE REVISION SUR MATHEMATIQUES 3

1 – Deux échelles d'inclinaison égale ont-elles la même pente ?

2 – Lorsque l'inclinaison est maximale, à savoir quand elle correspond à la position horizontale, la pente est-elle maximale ?

3 – Si l'on connaît l'angle de pente β comment peut-on calculer l'angle correspondant d'inclinaison α ?

4 – Si l'on représente l'intensité sur l'axe des ordonnées et la tension sur l'axe des abscisses, l'inclinaison du graphique de la loi d'ohm représente-t-elle la résistance ?

5 – Dans les conditions de la question ci-dessus, la pente du graphique de la loi d'ohm représente-t-elle la conductance ?

6 – Si l'on représente l'intensité sur l'axe vertical et la tension sur l'axe horizontal, quelle forme aura le graphique si la tension et l'intensité restent constantes ?

7 – Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{30}{40}\ ;\ \frac{0,5}{0,6}\ ;\ \frac{92}{120}\ ;\ \frac{81}{75}\ ;\ \frac{2,3}{0,7}\ ;\ \frac{28}{34}\ ;\ \frac{3,303}{0,99}\ ;\ \frac{625}{75}$$

$$\frac{121}{1331}\ ;\ \frac{210}{2310}\ ;\ \frac{8}{0,16}\ ;\ \frac{77}{49}\ ;\ \frac{7,7}{4,9}$$

8 – Additionner les fractions suivantes :

$$\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\ ;\ \frac{0,5}{3}+\frac{7}{4}\ ;\ \frac{1}{43}+\frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{11}+\frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \; ; \; \frac{0,6}{9} + \frac{7}{4} \; ; \; \frac{4}{5} + \frac{22}{3}$$

Effectuer les soustractions suivantes :

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{11} \; ; \; \frac{9}{16} - \frac{1}{3} \; ; \; \frac{1}{43} - \frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \; ; \; \frac{2}{11} - \frac{3}{5}$$

$$\frac{0,5}{3} - \frac{7}{4} \; ; \; \frac{1}{10} - \frac{1}{19}$$

9 – Multiplier les fractions suivantes :

$$\frac{9}{11} \times \frac{4}{6} \; ; \; \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} \; ; \; \frac{29}{27} \times 5 \; ; \; \frac{63}{210} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \; ; \; \frac{49}{72} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{5}$$

$$\frac{0,11}{17} \times \frac{21}{0,11} \; ; \; \frac{7}{2} \times \frac{0,1}{4} \times \frac{12}{7}$$

10 – Effectuer les divisions suivantes :

$$\frac{9}{11} : \frac{4}{6} \; ; \; \frac{3}{16} : \frac{3}{2} : \frac{25}{27} : 5 \; ; \; 5 : \frac{25}{27} \; ; \; \frac{1}{3} : \frac{1}{5} \; ; \; \frac{0,02}{0,003} : \frac{1}{5}$$

$$\frac{9}{22} : \frac{3}{2} \; ; \; 4 : \frac{2}{13} \; ; \; \frac{48}{49} : \frac{48}{18}$$

REPONSES A L'EXERCICE DE REVISION DE MATHEMATIQUES 2

1 – Le système de référence de la représentation graphique est un moyen pour identifier la position des points du dessin.

2 – Les coordonnées d'une représentation graphique plane sont des couples de lignes, auxquels correspondent des couples de valeurs bien définies. Ils servent à indiquer la position des points de la représentation graphique.

3 – Le graphique est la ligne qui joint tous les points d'une représentation graphique.

4 – Les axes d'un système de référence sont les droites graduées, sur lesquelles sont reportées les numérotations des valeurs positives et négatives.

5 – Les deux axes d'un diagramme cartésien sont perpendiculaires entre eux. L'un est horizontal, l'autre vertical.

6 – Oui, le graphique et la formule d'une loi physique donnée sont équivalents entre eux, puisque tous deux permettent de calculer les valeurs des grandeurs considérées.

7 – Les nombres relatifs sont les nombres plus grands que zéro (précédés parfois du signe +), le zéro et les nombres plus petits que zéro (précédés toujours du signe –).

8 – Oui, il est toujours possible d'effectuer les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, même avec les nombres relatifs.

9 – La règle des signes s'applique dans les calculs des nombres relatifs chaque fois que dans les additions et dans les soustractions (c'est-à-dire dans les sommes algébriques), le signe + de l'addition et le signe – de la soustraction précèdent directement le signe + ou le signe – des nombres relatifs.

En outre, elle s'applique pour déterminer le signe du produit et du quotient, dans la multiplication et la division des nombres relatifs.

10 – Somme de nombres relatifs :

12 ; – 524,01 - 871,989 ; – 37,242.

Multiplication de nombres relatifs :

–135,3 ; –1,3083 ; –1580 ;+135,3 ;+135,3 ; –2506 ; 0,04 ; 18769

Division de nombres relatifs :

4 ; 4 ; –4 ; – 4 ; 8,33 (valeur approximative par défaut) ;
– 43,33 (valeur approximative par défaut ; – 7,21 (valeur approximative par défaut).