EURELEC

MATHEMATIQUES

COURS DE BASE

ELECTRONIQUE

Au cours de cette leçon, nous verrons un certain nombre de concepts mathématiques, qui seront avant tout utiles pour l'étude théorique et qui complèteront les notions de mathématiques exposées dans ces leçons.

1 – LES FONCTIONS

Jusqu'à présent, nous avons étudié les formules du point de vue pratique des calculs, mais nous pourrions les considérer aussi du point de vue mathématique en général.

En particulier, il est possible de trouver la relation existant entre la grandeur représentée dans le premier membre de la formule et une des grandeurs représentées dans le second membre, de manière à établir dans quelle mesure cette première grandeur doit varier lorsque la seconde varie. Des relations de ce genre s'appellent des FONCTIONS A UNE VARIABLE INDEPENDANTE.

Voyons un exemple.

La loi d'Ohm, que nous avons déjà étudiée longuement au cours des trois premières leçons de mathématiques, peut être représentée par la formule :

$$I = \frac{V}{R}$$

Si nous observons cette formule d'un point de vue mathématique en général, nous trouverons que la valeur de l'intensité I est égale au quotient de la division entre les valeurs de la tension et de la résistance, soit V : R.

Dans les applications pratiques de la loi, on doit considérer que, dans un circuit donné, la résistance est constante, tandis que la tension et l'intensité peuvent varier. Or, du point de vue mathématique de la formule, on peut facilement établir comment l'intensité doit varier par rapport aux variations de la tension appliquée.

Dans chaque division si l'on double, triple ou quadruple le dividende, en laissant le diviseur inchangé, le quotient se trouvera doublé, triplé ou quadruplé.

Sur la base de cette simple constatation, on voit immédiatement, en partant de la formule, qu'en doublant, triplant ou quadruplant la tension V, (et en considérant que la résistance R ne varie pas) l'intensité I sera doublée, triplée ou quadruplée.

La dépendance particulière, dans laquelle la valeur de l'intensité se trouve, par rapport à la valeur de la tension, constitue un exemple de FONCTION A UNE VARIABLE INDEPENDANTE.

Dans cette fonction, la tension V est la variable indépendante, parce que si l'on imagine de changer librement sa valeur, on obtient comme conséquence le changement de valeur de l'intensité I.

Lorsqu'on veut indiquer qu'il existe en général une certaine relation entre deux variables, mais que l'on n'estime pas nécessaire de spécifier de quel genre de relation il s'agit, on utilise le symbole de fonction ci-dessous :

$$y = f(x).$$

La lettre x représente la variable indépendante, tandis que la lettre y représente l'autre variable qui dépend de x. Les opérations que l'on doit effectuer avec les valeurs de x pour obtenir les valeurs de y, sont représentées par la lettre f qui est l'initiale du mot "fonction".

Par ce système on peut, par exemple, indiquer d'une manière générale la dépendance existant entre l'intensité et la tension d'un circuit, sans préciser la relation qui lie ces valeurs. On pourra donc, au lieu de la formule de la loi d'Ohm, qui est $I = \frac{V}{R}$ écrire la fonction :

$$I = f(V).$$

Examinons maintenant les principales fonctions mathématiques, pour nous permettre de reconnaître plus facilement le déroulement des diverses lois, sous l'aspect mathématique de leurs formules respectives.

1 – 1 – FONCTIONS LINEAIRES

Entre deux grandeurs variables, peuvent exister des relations de type divers.

Selon les cas, on peut avoir différentes espèces de fonctions. La relation la plus simple que nous puissions trouver entre deux grandeurs d'une même formule est celle de PROPORTIONNALITE DIRECTE. De cette relation dérive le concept de FONCTION LINEAIRE, qui est très important pour l'étude de nombreuses lois physiques.

LA PROPORTIONNALITE DIRECTE EXISTE CHAQUE FOIS QU'UNE GRANDEUR AUGMENTE A UN RYTHME EGAL A CELUI D'UNE AUTRE VALEUR, DONT ELLE DEPEND.

Par exemple, le prix de l'énergie électrique dépend de la quantité d'énergie consommée. Si l'on double ou triple la consommation, le prix sera en conséquence deux ou trois fois plus élevé.

Si par contre, on diminue la consommation, le prix se trouvera également diminué. Le prix et la consommation d'énergie électrique sont donc deux grandeurs directement proportionnelles.

Voyons un autre exemple qui servira par la suite à bien utiliser le concept de fonction linéaire.

Considérons le mouvement d'une roue qui tourne à vitesse constante (figure 1-a). Dans ce mouvement, on peut identifier deux grandeurs variables directement proportionnelles : le TEMPS et l'ANGLE décrit par un rayon de la roue, que nous appellerons le RAYON VECTEUR.

Supposons que le rayon vecteur se trouve initialement dans la position PO (figure 1-b).

Après avoir décrit un angle de 45°, il touchera le point A. Du point A, après avoir décrit un autre angle de 45°, il arrivera au point B. Du point B, il ira au point C et ainsi de suite, en décrivant toujours des angles de 45° entre un point et le point suivant.

Il est évident que le rayon vecteur, en passant d'un point à l'autre, emploiera un certain temps.

Or, puisque la roue tourne à une vitesse constante, on doit admettre que le RAYON VECTEUR EMPLOIERA TOUJOURS LE MEME TEMPS POUR DECRIRE DES ANGLES EGAUX.

En effet, s'il devait employer des temps différents, cela signifierait qu'il tourne parfois plus vite, et parfois plus lentement, donc que sa vitesse ne serait plus constante.

Supposons que le rayon vecteur, mette 1 seconde pour décrire un angle de 45°, c'est-à-dire, en d'autres termes, que sa VITESSE ANGULAIRE soit de 45 degrés à la seconde (45°/s).

En partant de la position PO, le rayon vecteur mettra donc une seconde pour arriver au point A, une autre seconde pour arriver au point B, encore une autre seconde pour arriver au point C et ainsi de suite pour chaque autre point figurant sur le cercle de la figure 1-b.

Si l'on additionne progressivement les secondes et les angles de 45° les uns après les autres, on obtient deux séries de valeurs, constituant la représentation numérique des deux variables qui composent le mouvement de la roue : la série 0 s, 1 s, 2 s, 3 s, etc.., représente le temps passé ; la série 0°, 45°, 90°, 135°, etc.. représente l'augmentation de l'angle décrit par le rayon vecteur à partir de la position initiale PO.

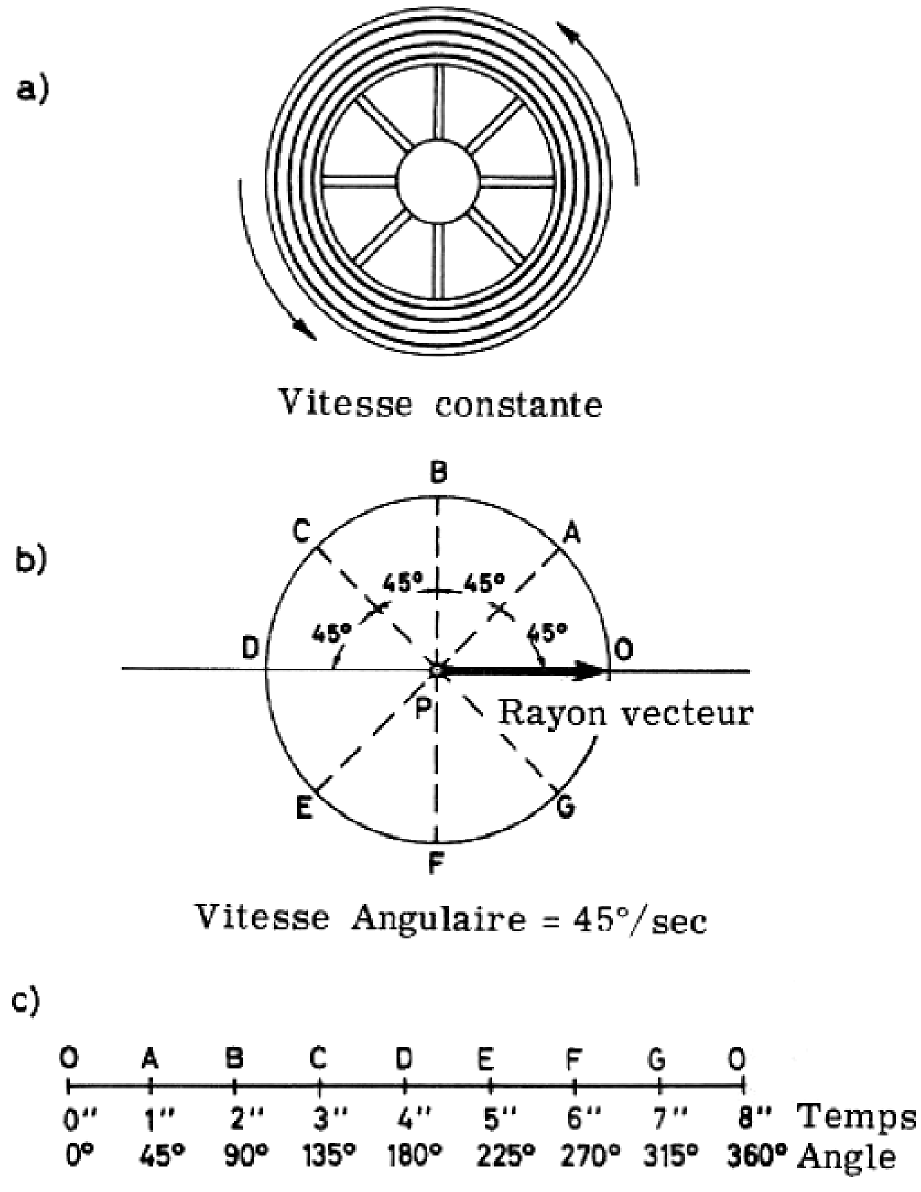
Sur la figure 1-c, on a reporté les séries des temps et des angles, pour un tour complet du rayon vecteur.

A chaque valeur du temps, correspond une valeur de l'angle et une position bien définies du rayon vecteur. Donc, outre les deux valeurs correspondantes, on a aussi reporté sur la même colonne, les lettres utilisées dans la figure 1-b pour indiquer les positions correspondantes du rayon vecteur sur le cercle.

Observons maintenant les séries des temps et des angles.

Si l'on considère les valeurs de l'une et de l'autre série de valeurs, on peut mettre en relief trois propriétés mathématiques.

PREMIERE PROPRIETE. SI L'ON DOUBLE LE TEMPS, EN PARTANT D'UNE VALEUR QUELCONQUE, ON DOUBLE AUSSI L'ANGLE CORRESPONDANT.



GRANDEURS DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES

Figure 1

Exemple

En partant de 3 s et en doublant cette valeur, on arrive à 6 s. En correspondance, l'angle de 135°, qui a été décrit par le rayon vecteur en 3 s, augmente jusqu'à devenir 270°. Il double donc à un rythme égal à celui du temps.

Cette propriété démontre que le **TEMPS ET L'ANGLE DECRIT PAR LE RAYON VECTEUR, SONT DIRECTEMENT PROPORTIONNELS.**

DEUXIEME PROPRIETE – **LE RAPPORT ENTRE L'OUVERTURE DE L'ANGLE ET LE TEMPS, A SAVOIR LA DIVISION ENTRE LES VALEURS CORRESPONDANTES DE L'ANGLE ET DU TEMPS, EST CONSTANT ET EGAL A LA VITESSE ANGULAIRE.**

Exemples

$45° : 1'' = 45°/s$; $90° : 2'' = 45°/s$; $135° : 3'' = 45°/s$, etc..

Cette propriété permet d'obtenir une formule représentant le lien mathématique entre les grandeurs proportionnelles.

A cette fin, nous désignons par la lettre grecque φ (phi) la valeur de l'angle, par la lettre t la valeur du temps et par la lettre ω (omega) la vitesse angulaire. La formule que l'on obtient est la suivante :

1)

$$\frac{\varphi}{t} = \omega \text{ (constante)}$$

Du point de vue mathématique, cette formule est semblable à la formule bien connue de la loi d'ohm $\frac{V}{I} = R$ (constante), que nous avons étudiée au cours de la première leçon de Mathématiques.

TROISIEME PROPRIETE - SI L'ON MULTIPLIE LE TEMPS PAR LA VITESSE ANGULAIRE (CONSTANTE), ON OBTIENT LA VALEUR DE L'ANGLE CORRESPONDANT AU TEMPS QUE L'ON A PREALABLEMENT CHOISI.

Exemples

$4'' \times 45^{0}/s = 180^{0}$; $5'' \times 45^{0}/s = 225^{0}$; $6'' \times 45^{0}/s = 270^{0}$ etc..

Cette propriété permet d'obtenir une autre formule, qui représente, tout comme la précédente, le lien mathématique entre les grandeurs proportionnelles. En conservant les mêmes désignations que ci-dessus, nous aurons :

2) $$t \times \omega = \varphi$$

Cette formule s'avère semblable à l'une des trois formules de la loi d'Ohm, soit plus précisément à la formule $I \times R = V$.

En résumé, nous pouvons observer que la PREMIERE PROPRIETE NOUS PERMET D'AFFIRMER QUE LES GRANDEURS VARIABLES TEMPS ET ANGLE, IDENTIFIEES AU COURS DU MOUVEMENT DE LA ROUE, SONT DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES.

LA DEUXIEME PROPRIETE ET LA TROISIEME PROPRIETE REPRESENTENT PAR CONTRE DEUX CRITERES MATHEMATIQUES UTILES POUR RECONNAITRE DANS CES FORMULES LA PRESENCE DE GRANDEURS DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES.

Les deux critères mathématiques de la proportionnalité directe, nous intéressent tout particulièrement. Exposons-les encore une fois, en généralisant la deuxième propriété et la troisième propriété.

PREMIER CRITERE DE PROPORTIONNALITE DIRECTE

DEUX GRANDEURS VARIABLES, REPRESENTEES DANS UNE

FORMULE,SONT DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES, LORSQUE, TOUTES LES AUTRES GRANDEURS DE CETTE MEME FORMULE ETANT CONSTANTES, LE RAPPORT DES VARIABLES, A SAVOIR LE QUOTIENT DES VALEURS CORRESPONDANTES, S'AVERE CONSTANT.

DEUXIEME CRITERE DE PROPORTIONNALITE DIRECTE

DEUX GRANDEURS VARIABLES SONT DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES, SI L'UNE EST EGALE AU PRODUIT DE L'AUTRE PAR UNE CONSTANTE.

En appliquant ces critères, nous pouvons établir par exemple, que l'intensité et la tension d'un circuit, réglé par la loi d'Ohm, sont directement proportionnelles.

En effet, en nous rappelant que la valeur de la résistance est constante, sur la base de la formule $\frac{V}{I} = R$, on trouve que le rapport entre tension et intensité est constant. En outre, sur la base de la formule $I \times R = V$ on trouve que le produit de l'intensité par une constante (la résistance) est égal à la tension.

Nous avons déjà vu que la fonction constituée par des grandeurs directement proportionnelles s'appelle "fonction linéaire". L'angle décrit par le rayon vecteur est donc une fonction linéaire du temps, et l'intensité d'un circuit ohmique est une fonction linéaire de la tension.

Toutefois, le concept de fonction linéaire exige une définition plus générale que celui de la proportionnalité directe, et par conséquent, pour bien nous fixer les idées au sujet de ce nouveau concept, il convient d'examiner le mouvement de la roue d'un point de vue nouveau.

Précédemment, nous avons supposé que le rayon vecteur se trouve initialement dans la position horizontale PO, indiquée sur la figure 1-b.

Dans cette position, l'angle formé par le rayon vecteur et la droite horizontale est égal à zéro. Dans ce cas, l'instant initial (0 s) correspond à l'angle de zéro degré et toutes les considérations ultérieures s'avèrent extrêmement simplifiées.

Admettons maintenant que le rayon vecteur se trouve par contre, primitivement dans la position PO', indiquée sur la figure 2.

L'angle φ_0 (phi zéro), formé par le rayon vecteur et la droite horizontale à l'instant où commence le mouvent régulier de la roue, s'appelle ANGLE DE PHASE ou aussi, plus simplement PHASE.

Supposons, à titre d'exemple numérique, que l'angle de phase soit égal à 30^0.

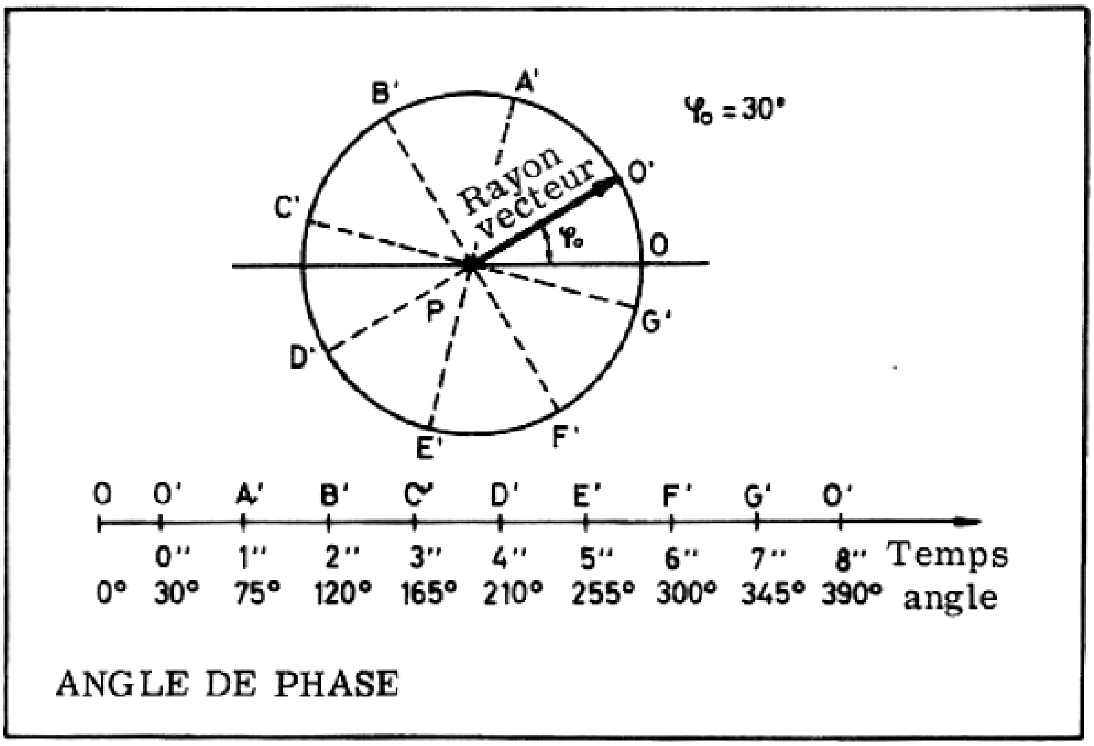


Figure 2

Il est évident qu'à l'instant 0'' correspond un angle de 30° ; à 1'' correspondra l'angle de 45° décrit par le rayon vecteur, augmenté de 30° (angle de phase) soit un angle de 75° ; à 2'' correspondra un angle double du précédent décrit par le rayon vecteur augmenté lui aussi d'un angle de 30°, soit un angle de 120° ; de façon analogue, à 3'' correspondra un angle de 165°, à 4'' un angle de 210 ° et ainsi de suite jusqu'à ce que le tour soit terminé et que le rayon vecteur retourne à sa position initiale PO' après avoir passé successivement par les points A', B', C', D' etc....

Dans ces conditions nouvelles, le rapport entre l'angle et le temps correspondant n'est plus constant et le produit entre le temps et la vitesse angulaire (constante) n'est plus égal à l'angle.

Par conséquent, les mesures des angles et des temps correspondants, indiquées sur la figure 2, n'ont pas les mêmes propriétés que les mesures indiquées sur la figure 1-c.

Il suffit d'observer que, tandis que les divisions 45° : 1'' = 45°/s, 90° : 2'' = 45°/s, 135° : 3'' = 45°/s, etc... donnaient toutes le même résultat, les divisions 75° : 1'' = 75, 120° : 2 = 60, 165° : 3'' = 55, etc... donnent maintenant des résultats différents.

En outre, tandis que les multiplications 1'' X 45°/s = 45°, 2'' X 45°/s = 90°, 3'' X 45°/s = 135° avaient pour résultat la valeur de l'angle décrit par le rayon vecteur, maintenant le résultat de ces mêmes multiplications ne correspond plus à l'angle mesuré, parce qu'au lieu de 45° l'angle correspondant est de 75°, au lieu de 90° il est de 120°, au lieu de 135° il est de 165° et ainsi de suite.

En bref, à cause de l'adjonction de 30° (angle de phase) à l'angle décrit par le rayon vecteur, les deuxième et troisième propriétés, précédemment décrites au cours de l'étude du mouvement de la roue, cessent d'exister.

Ceci nous démontre que le premier et le deuxième critères de proportionnalité directe, appliqués au temps et à la nouvelle mesure des angles, donnent un résultat négatif. Nous devons donc conclure que maintenant, dans les deux suites indiquées sur la figure 2, l'ANGLE ET LE TEMPS NE SONT PLUS DIRECTEMENT PROPORTIONNELS.

Cette conclusion ne nous permet toutefois pas d'affirmer que l'angle n'est pas une fonction linéaire du temps, parce que l'idée de fonction linéaire est liée à l'idée de proportionnalité directe des grandeurs, mais ce lien s'entend dans un sens large, et se rapporte aux VARIATIONS des grandeurs et non à chacune de leurs valeurs.

Pour être plus précis, nous dirons qu'UNE FONCTION EST LINEAIRE, QUAND EN DOUBLANT (OU EN DIVISANT PAR DEUX) L'INTERVALLE ENTRE DEUX VALEURS QUELCONQUES DE LA VARIABLE INDEPENDANTE, ON DOUBLE (OU DIVISE PAR DEUX) EN MEME TEMPS, L'INTERVALLE ENTRE LES VALEURS CORRESPONDANTES DE L'AUTRE VARIABLE, C'EST-A-DIRE QUAND LES INTERVALLES INDIQUANT LES VARIATIONS SONT DIRECTEMENT PROPORTIONNELS ENTRE EUX.

Considérons donc, de ce nouveau point de vue, la progression des temps et des angles indiqués sur la figure 2.

L'intervalle entre 1" et 3" a une durée de 2". Correspondant à cela, l'intervalle entre les angles de 75° et de 165° a une ouverture de 90°. Doublons maintenant l'intervalle du temps, en prenant en considération la durée s'écoulant entre les angles de 75° et de 255° ; l'intervalle a maintenant une ouverture de 180° et se trouve lui aussi doublé.

On peut répéter cette vérification avec des intervalles de temps plus grands ou plus petits que celui de l'exemple donné : le lien entre les intervalles des temps et les intervalles des angles correspondants s'avèrera être toujours le même.

Par conséquent, les variations du temps et de l'angle sont directement proportionnelles et sur la base de la définition précédente, l'angle doit être considéré comme une fonction linéaire du temps.

On pourrait démontrer que la largeur de l'intervalle entre les angles, qui correspondent à deux temps différents, ne varie pas si l'on change l'angle de phase. Mais nous nous bornerons ici à une simple vérification à l'aide d'éléments déjà connus.

Dans le cas représenté dans la figure 2, l'angle de phase est égal à 30°. Dans le cas de la figure 1-b et de la figure 1-c, nous n'avons pas considéré l'angle de phase, puisque l'angle entre le rayon vecteur et l'axe horizontal est égal à zéro. Nous pouvons maintenant préciser que les deux cas ne sont différents l'un de l'autre, que par l'ouverture des angles de phase respectifs: sur la figure 2, $\varphi_0 = 30^\circ$, alors que sur la figure 1-b et sur la figure 1-c, $\varphi_0 = 0^\circ$.

Malgré la différence de valeur de l'angle de phase, on trouve qu'à des intervalles de temps égaux, correspondent des intervalles égaux entre les angles correspondants de l'un et de l'autre cas.

Par exemple, à l'intervalle de 2'' allant de 1'' à 3'', correspond l'intervalle entre les angles de 165° et 75° soit 90°. Dans le deuxième cas, il est de $135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$; donc dans les deux cas, l'intervalle est de 90°.

On pourrait donner de nombreux autres exemples, mais les deux résultats seraient toujours égaux entre eux, ce qui nous démontre que l'ANGLE PAR LEQUEL ON MESURE LE DEPLACEMENT DU RAYON VECTEUR DANS LE MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME, EST UNE FONCTION LINEAIRE DU TEMPS, QUELLE QUE SOIT LA VALEUR DE L'ANGLE DE PHASE.

Afin d'en terminer avec les fonctions linéaires, voyons brièvement comment se présentent leurs représentations graphiques dans les systèmes cartésiens.

Dans la troisième leçon de Mathématiques, nous avons établi que la loi d'Ohm, exprimée sous la forme $I = \frac{V}{R}$ ou $I = \frac{1}{R} \times V$, est représentée par une droite passant par l'origine du système d'axes cartésiens. La tension V, variable indépendante, est portée sur l'axe des abscisses. L'intensité I, variable dépendant de la tension, est portée sur l'axe des ordonnées.

Par le même procédé, nous pouvons maintenant tracer le graphique de la formule $t \times \omega = \varphi$ qui représente la loi du mouvement circulaire à vitesse constante, quand l'angle de phase est égal à zéro.

Pour suivre le même ordre dans lequel nous avons présenté les variables de la loi d'Ohm, écrivons la formule précédente de la manière suivante :

$$\varphi = \omega \times t.$$

En comparant cette formule avec $I = \frac{1}{R} \times V$, on remarque que la variable indépendante t occupe la même place que la variable indépendante V. La constante ω occupe la même place que la constante $\frac{1}{R}$ et la variable dépendante φ occupe la même place que la variable dépendante I.

Etant donné la similitude qui existe entre les deux formules, les représentations graphiques doivent se montrer également semblables.

En effet, si on porte la variable indépendante t (temps) sur l'axe des abscisses et la variable indépendante φ (angle) sur l'axe des ordonnées (figure 3), on obtient également un graphique, constitué par une droite représentant le mouvement circulaire à vitesse constante.

La pente de cette droite représente la valeur de la vitesse angulaire, tout comme la pente de la droite relative à la loi d'Ohm (Mathématiques 3) représente la conductance, à savoir la valeur $\frac{1}{R}$.

L'allure rectiligne du graphique et sa pente ne varient pas quand l'angle de phase change.

En effet, si l'angle de phase est égal à zéro, la droite passe par l'origine. Si par contre l'angle de phase φ_0 est différent de zéro, par exemple de 180^0, le graphique sera toujours constitué par une droite, parallèle à la précédente et déplacée vers le haut du diagramme, à une distance verticale, égale à la valeur de φ_0 pris sur l'axe des ordonnées comme dans la figure 3.

Le fait que le deuxième graphique, s'avère déplacé par rapport au premier, d'une quantité fixe et que par conséquent les deux droites soient parallèles, peut être compris facilement en se rappelant que les angles $\varphi = \omega t$ sont augmentés d'une quantité fixe, instant par instant, en passant du cas dans lequel $\varphi_0 = 0^0$ au cas où $\varphi_0 = 180^0$.

Précédemment nous avions choisi $\varphi_0 = 30^0$ au lieu de $\varphi_0 = 180^0$, mais les valeurs mises à part, les considérations demeurent les mêmes.

Pour exprimer ces conditions en une formule, il suffit d'additionner au second membre de la formule $\varphi = \omega t$, la grandeur φ_0 de l'angle de phase et l'on obtiendra :

3) $$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

TOUTES LES FORMULES SEMBLABLES A LA PRECEDENTE, PEUVENT REPRESENTER UNE FONCTION LINEAIRE A UNE SEULE VARIABLE INDEPENDANTE.

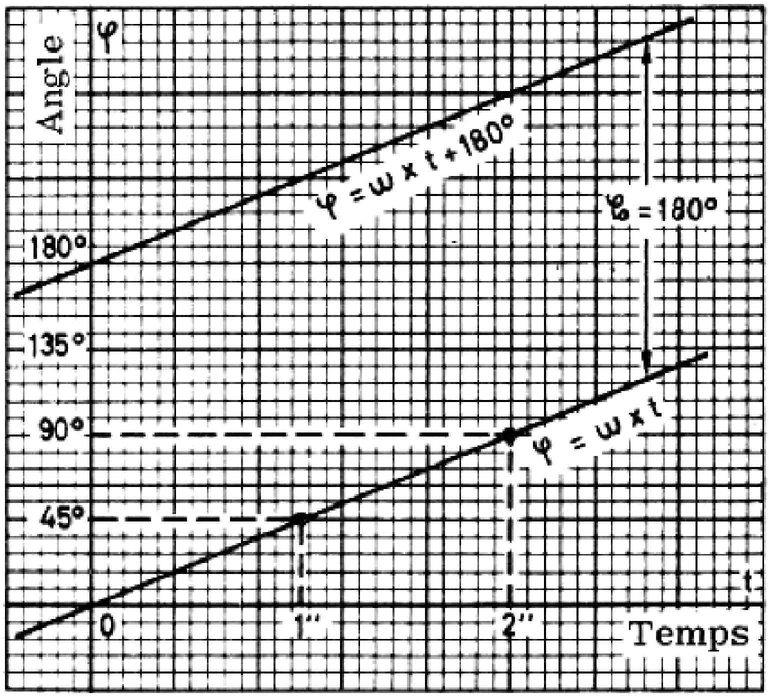
A cette fin, il suffit que la lettre du premier membre (φ) représente la variable dépendante ; une lettre du second membre (t) devra représenter la variable indépendante ; une autre lettre du second membre ou un nombre fixe, devra par contre représenter une grandeur constante (ω) qui multiplie ou divise la variable indépendante ; enfin, une dernière lettre du second membre ou un nombre fixe, pourra représenter une autre grandeur constante (φ_0) que l'on ajoute ou soustrait à la partie précédente du second membre.

Angle = Vitesse angulaire x temps

$$\varphi = \omega \times t$$

Angle = Vitesse angulaire x temps + angle de phase

$$\varphi = \omega \times t + \varphi_0$$



FONCTIONS LINEAIRES

Figure 3

LE GRAPHIQUE DES FONCTIONS LINEAIRES, QUE L'ON OBTIENT A PARTIR DE LA FORMULE 3 EST TOUJOURS CONSTITUE PAR UNE DROITE ; D'AUTRE PART, UNE FONCTION DONT LE GRAPHIQUE CARTESIEN EST UNE DROITE EST TOUJOURS UNE FONCTION LINEAIRE.

Nous avons consacré une bonne partie de cette leçon aux fonctions linéaires, car il s'agit là d'un sujet fondamental. Nous allons maintenant examiner rapidement les principales autres fonctions.

1 – 2 – FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Les calculs numériques des fonctions linéaires se réduisent exclusivement aux quatre opérations élémentaires de l'arithmétique, multiplication, division, addition ou soustraction.

A ce propos, il suffit de rappeler les exemples numériques de la première leçon de Mathématiques pour l'étude de la loi d'Ohm : pour calculer la valeur de l'intensité, on divisait la tension par la résistance, pour calculer la valeur de la tension, on multipliait l'intensité par la résistance.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas effectué de calculs numériques relatifs aux fonctions linéaires, comprenant également des additions ou des soustractions.

Toutefois, nous avons déjà illustré la possibilité d'additionner une constante (l'angle de phase $\varphi_0 = 30^o$), au cours de l'étude du mouvement circulaire à vitesse uniforme.

Au lieu de l'addition de la constante, on pourrait introduire une soustraction et toutes les considérations qui ont été faites, resteraient absolument valables.

Examinons maintenant deux autres fonctions qui se réfèrent aux opérations arithmétiques étudiées dans la quatrième leçon de Mathématiques : LA FONCTION EXPONENTIELLE que l'on obtient par l'élévation à une puissance d'une base donnée, et la FONCTION LOGARITHMIQUE que l'on obtient par la détermination des logarithmes des nombres, en utilisant une base donnée.

Pour étudier ces fonctions, il nous faut absolument faire appel à leurs représentations graphiques dans le diagramme cartésien, puisque dans les graphiques il est très facile de reconnaître, à première vue, la progression générale de la variable dépendante.

Examinons par exemple la fonction exponentielle, qui lie toutes les puissances du nombre 2 à ses valeurs respectives.

Cette fonction peut s'exprimer en indiquant l'exposant variable des puissances à base 2, au moyen de la lettre N et la valeur de ces mêmes puissances, elle aussi variable, au moyen de la lettre Y.

En procédant ainsi, on obtient la formule suivante :

4) $$Y = 2^N.$$

La lettre N représente la variable indépendante, c'est-à-dire la variable dont on établit librement la valeur. La lettre Y représente par contre la variable dont la valeur dépend du nombre N.

Exemples :

Pour $N = 0$	$Y = 2^0 = 1$
Pour $N = 1$	$Y = 2^1 = 2$
Pour $N = 2$	$Y = 2^2 = 4$
Pour $N = 3$	$Y = 2^3 = 8$
Pour $N = -1$	$Y = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Si nous avons recours au diagramme cartésien et si nous indiquons sur l'axe des abscisses les valeurs de N et sur l'axe des ordonnées les valeurs de Y (figure 4), nous trouverons, en rapport avec chaque couple des valeurs précédentes, un point du graphique de la fonction : le point A pour les valeurs $N = 0$, $Y = 1$; le point B pour $N = 1$, $Y = 2$; le point C pour $N = 2$, $Y = 4$; le point D pour $N = 3$, $Y = 8$; le point E pour $N = -1$, $Y = 0{,}5$.

Ces cinq points sont déjà suffisants pour nous montrer l'allure du graphique. Toutefois, pour compléter la représentation, nous avons tracé sur la figure la ligne unissant les points indiqués, en passant par toutes les valeurs intermédiaires de la fonction.

Or, si nous examinons l'allure de cette ligne, nous pouvons faire deux observations importantes :

– le graphique présente une PENTE VARIABLE augmentant au fur et à mesure que l'on passe des valeurs négatives de N au zéro et du zéro aux valeurs positives croissantes ;

– la pente du graphique augmente lentement dans le domaine des valeurs négatives de N ; puis elle augmente plus rapidement dans le domaine des valeurs positives faibles, correspondant aux valeurs de N comprises entre zéro et 1 ; enfin, elle augmente très rapidement dans le domaine des valeurs positives plus grandes que 1 et surtout plus grandes que 2.

A partir de ces deux observations, on déduit que l'ALLURE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE EST TOUJOURS CROISSANTE ; en outre, on voit que les AUGMENTATIONS DE LA FONCTION Y DEVIENNENT PROGRESSIVEMENT PLUS AMPLES, AU FUR ET A MESURE QUE CROIT LA VALEUR DE LA VARIABLE INDEPENDANTE N.

Cette dernière propriété peut être facilement vérifiée à l'aide d'un exemple numérique.

Si nous observons les valeurs indiquées sur le diagramme de la figure 4, nous remarquons que, tandis que la variable indépendante N passe de la valeur zéro à la valeur 1, la variable dépendante Y passe de la valeur 1 à la valeur 2 ; ensuite quand la valeur N passe de la valeur 1 à la valeur 2 et de la valeur 2 à la valeur 3, couvrant ainsi deux intervalles égaux au précédent, la variable Y passe respectivement de la valeur 2 à la valeur 4 et de la valeur 4 à la valeur 8, en couvrant donc des intervalles de plus en plus grands.

L'allure du tracé des fonctions de cette espèce, s'appelle l'ALLURE EXPONENTIELLE.

En physique et dans les sciences appliquées, il existe différentes lois dans le tracé à allure exponentielle : par exemple, l'allure du courant de charge ou de décharge d'un condensateur, à travers une résistance, est exponentielle. L'émission des électrons, sous l'effet de la température de certaines matières, utilisées dans la fabrication des cathodes des tubes-radio, est exponentielle. La diminution progressive des oscillations libres, générées dans un circuit résonnant, est aussi exponentielle, etc...

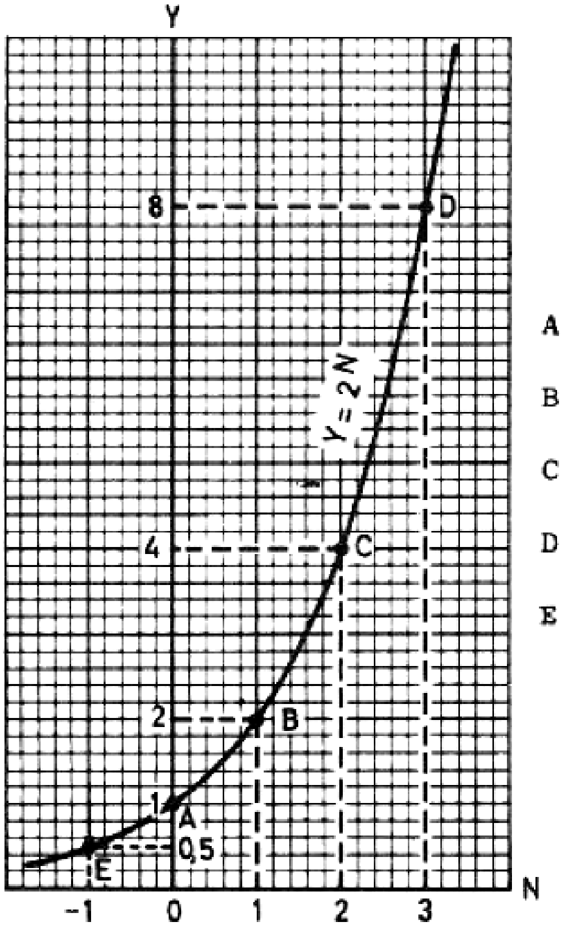
Examinons maintenant le tracé d'une autre courbe, qui sous certains aspects, est semblable à la précédente : la courbe des fonctions logarithmiques.

Dans la quatrième leçon de Mathématiques, nous avons déjà vu que le logarithme d'un nombre est lié au concept de puissance. Nous avons même établi que la détermination du logarithme des nombres, est une opération inverse, par rapport à celle de l'élévation à une puissance.

Ce même lien se retrouve, comme nous le verrons maintenant, entre la fonction exponentielle et la fonction logarithmique.

Voyons d'abord comment on peut définir la fonction logarithmique en utilisant les mêmes valeurs numériques que celles figurant dans le diagramme de la figure 4.

Selon la définition du logarithme à la valeur $2^0 = 1$, correspond le



A, $Y = 2^0 = 1$

B, $Y = 2^1 = 2$

C, $Y = 2^2 = 4$

D, $Y = 2^3 = 8$

E, $Y = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$

FONCTION EXPONENTIELLE

Figure 4

logarithme de 1 à base 2, égal à zéro. A la valeur 2^1, correspond le logarithme de 2 à base 2, égal à 1. A la valeur 2^2, correspond le logarithme de 4 à base 2, égal à 2, etc.. Enfin à la valeur $2^{-1} = 0{,}5$, correspond le logarithme de 0,5 à base 2, égal à -1.

En observant les exemples précédents, on remarque que le logarithme a une valeur égale à l'exposant représenté par la lettre N dans la formule $Y = 2^N$.

D'autre part, le nombre dont on indique le logarithme est toujours égal à la valeur de la puissance, c'est-à-dire à la valeur représentée par la lettre Y dans cette même formule.

Dans la fonction exponentielle, on suppose connue la valeur de N, variable indépendante et en se basant sur toutes les valeurs de N, on établit chaque fois la valeur de Y, variable dépendante.

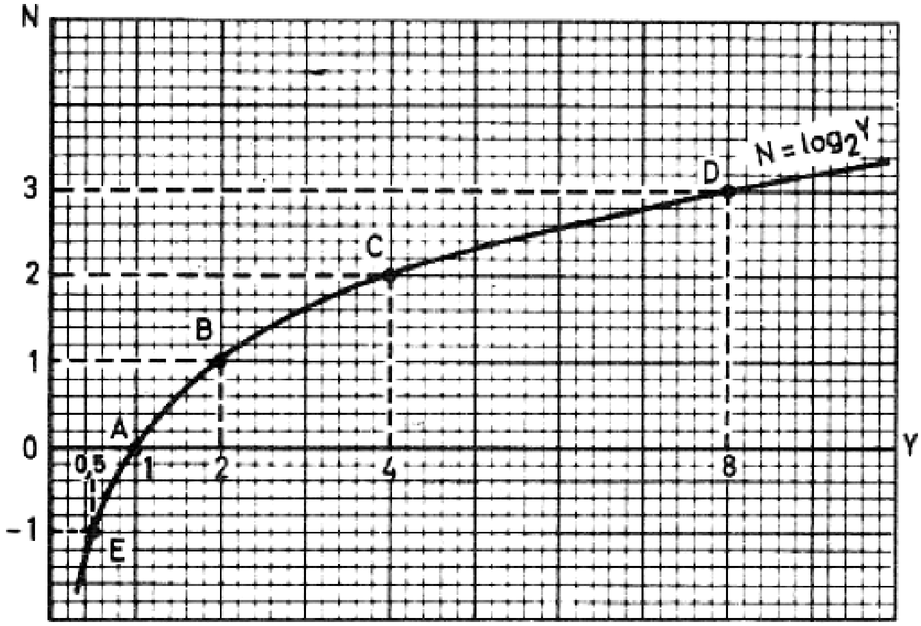
Dans la fonction logarithmique, la situation est inversée. C'est-à-dire que l'on suppose connue la valeur de Y, devenue variable indépendante, et en se basant sur les valeurs de Y on détermine chaque fois la valeur de l'exposant N, devenue variable dépendante.

Or, si dans le premier cas, on utilisait la formule $Y = 2^N$, dans le deuxième cas, pour indiquer la fonction inverse, on utilisera la formule équivalente ci-dessous :

5) $$N = \log_2 Y.$$

Les deux formules expriment substantiellement le même lien entre les nombres N (exposants variables), le nombre 2 (base constante) et les nombres Y (valeurs des puissances variables). Mais la fonction logarithmique qui en dérive, en considérant Y variable indépendante et N variable dépendante, a une courbe très différente de celle de la fonction exponentielle.

Pour comparer les tracés des deux courbes, construisons le graphique de la fonction logarithmique (figure 5), en adoptant le même procédé que



A ⟶ $N = \log_2 1 = 0$

B ⟶ $N = \log_2 2 = 1$

C ⟶ $N = \log_2 4 = 2$

D ⟶ $N = \log_2 8 = 3$

E ⟶ $N = \log_2 0{,}5 = -1$

FONCTION LOGARITHMIQUE

Figure 5

pour construire le graphique de la fonction exponentielle, (figure 4).

Au $\log_2 1 = 0$ dans le diagramme de la figure 5 correspond le point A. Au $\log_2 2 = 1$ correspond le point B. Au $\log_2 4 = 2$ correspond le point C. Au $\log_2 8 = 3$ correspond le point D. Enfin au $\log_2 0{,}5 = -1$ correspond le point E.

Ces cinq points sont déjà suffisants pour apercevoir l'allure de la fonction logarithmique. Toutefois, pour compléter le graphique, on a tracé sur la figure la ligne unissant les points marquant toutes les valeurs intermédiaires de la fonction.

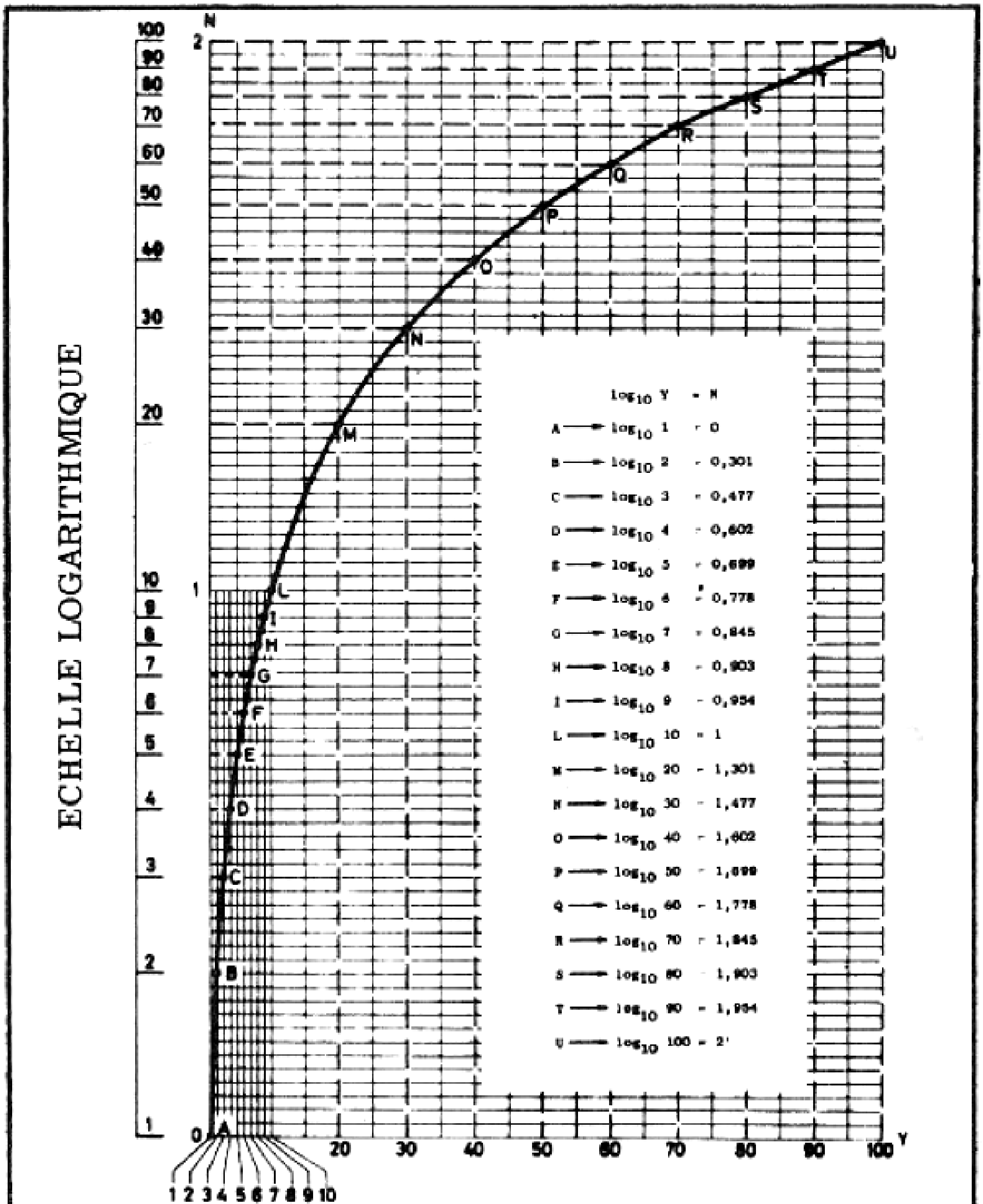
Le graphique ainsi obtenu, présente tout comme celui de la figure 4, une pente variable. Toutefois dans ce dernier cas, on remarque que la PENTE EST TRES ACCENTUEE DANS LE TRAIT INITIAL DE LA COURBE ET DIMINUE D'ABORD RAPIDEMENT PUIS LENTEMENT AU FUR ET A MESURE QUE LES VALEURS DE Y AUGMENTENT.

Vue sous cet aspect, l'ALLURE DE LA COURBE LOGARITHMIQUE EST EXACTEMENT L'INVERSE DE CELLE DE LA COURBE EXPONENTIELLE, et c'est justement ce que l'on entend en disant que la FONCTION LOGARITHMIQUE EST L'INVERSE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Jusqu'à présent nous avons considéré les logarithmes à base 2, mais dans les applications des mathématiques à l'électronique, on trouve presque toujours des logarithmes à base 10.

Le changement de la base ne modifie pas l'allure générale de la fonction logarithmique, dont toutes les considérations qui ont été faites en étudiant la fonction $N = \log_2 Y$ sont également valables pour la fonction $N = \log_{10} Y$.

Dans la figure 6, a été reportée la courbe logarithmique à base 10 étendue à l'intervalle des valeurs Y, compris entre 1 et 100.



COURBE LOGARITHMIQUE ET ECHELLE LOGARITHMIQUE (A base 10)

Figure 6

A première vue, le nouveau graphique pourrait apparaître quelque peu différent de celui de la figure 5, particulièrement si l'on considère que dans l'intervalle compris entre les valeurs 1 et 8 de la variable indépendante Y, la pente se montre encore plus accentuée, tandis que par rapport au même intervalle dans le graphique de la figure 5 la pente est déjà très réduite.

Cette différence dans le trait initial de la courbe figurant sur la figure 6, est due en partie au fait que la base des logarithmes est plus grande (10 au lieu de 2) et en partie à l'utilisation, sur l'axe des abscisses, d'une échelle plus serrée que la précédente et, sur l'axe des ordonnées, d'une échelle plus lâche. Des modifications de ce genre peuvent toujours être effectuées, sans que pour cela l'allure générale de la fonction se trouve modifiée.

Dans le graphique de la figure 6, figurent 19 point (A, B, C...U) représentant autant de valeurs de la fonction logarithmique à base 10. Ces valeurs ont été relevées à partir de tableaux établis à cet effet (TABLES DES LOGAITHMES DECIMAUX).

A côté de l'axe des ordonnées, a été tracé un axe vertical, sur lequel on a porté autant de graduations qu'il y a de points mis en relief sur le graphique, chacune de ces graduations se trouvant au même niveau que son point sur le graphique.

Puisque le niveau des points représente la valeur du logarithme d'un nombre, CHAQUE GRADUATION DU NOUVEL AXE POURRA REPRESENTER LE LOGARITHME DU NOMBRE ET EVENTUELLEMENT LE NOMBRE LUI-MEME.

Par exemple, le point 10 tracé au niveau du point L, peut représenter le logarithme du nombre 10, à savoir 1, et en même temps, il peut représenter directement le nombre 10. On peut dire la même chose du point 100, tracé au niveau du point U, qui peut représenter soit le logarithme du nombre 100, à savoir 2, soit directement le nombre 100. Il en est de même pour tous les nombres de l'échelle des logarithmes de la figure 6, compris entre 1 et 10 et entre 10 et 100.

Dans l'un et dans l'autre cas, l'échelle construite sur l'axe en se servant de la courbe logarithmique du diagramme cartésien s'appelle ECHELLE LOGARITHMIQUE.

L'échelle logarithmique peut être considérée comme l'une des applications les plus importantes de la fonction logarithmique, dans le domaine des représentations graphiques, car elle peut indiquer sur un segment relativement petit, un intervalle de valeurs étendu.

En effet, les nombres entre 10 et 100 se trouvent répartis dans un intervalle égal à celui qu'occupent les nombres entre 1 et 10. Si cette échelle logarithmique de la figure 6 était ensuite prolongée à ses deux extrémités, l'intervalle des nombres compris entre 0,1 et 1 et l'intervalle des nombres compris entre 100 et 1.000 seraient toujours égaux aux deux intervalles précédents.

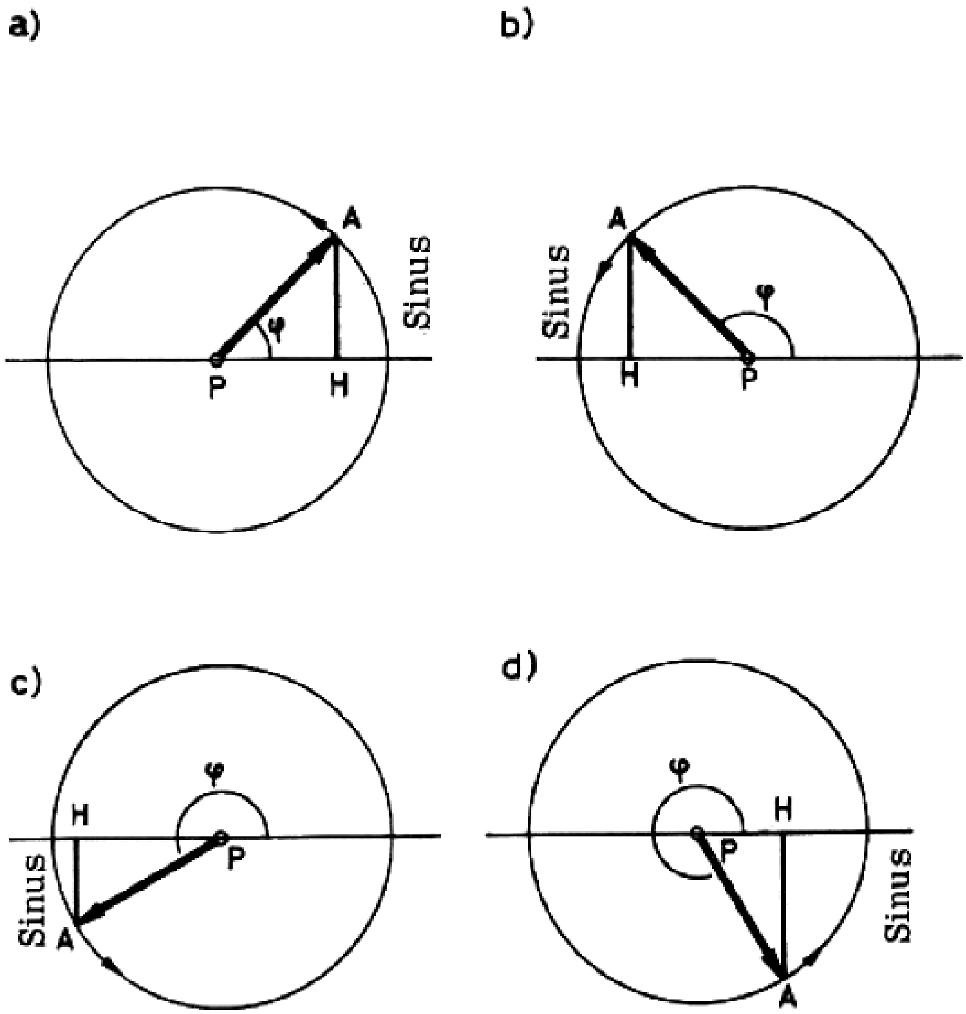
1 – 3 – FONCTIONS SINUSOIDALES

A partir de l'étude du mouvement circulaire d'un rayon vecteur, on peut mettre en évidence, outre les fonctions linéaires déjà examinées précédemment, diverses autres fonctions mathématiques qui forment une catégorie à part et s'appellent les FONCTIONS CIRCULAIRES.

Parmi toutes les fonctions circulaires, nous ne considérerons que celle ayant pour variable dépendante, une grandeur géométrique appelée SINUS.

Le sinus peut être défini d'un point de vue géométrique et mécanique, en imaginant la rotation à vitesse constante d'un rayon vecteur, dont la longueur sera prise comme unité de mesure. Ce rayon vecteur est indiqué sous le nom de VECTEUR TOURNANT UNITAIRE.

Sur la figure 7, est représenté le vecteur tournant unitaire en quatre



PA = Vecteur tournant unitaire
AH = Sinus de l'angle φ

FONCTION CIRCULAIRE : LE SINUS D'UN ANGLE

Figure 7

positions successives (figures 7-a, 7-b, 7-c, 7-d), caractérisées par quatre ouvertures différentes de l'angle φ formé par le vecteur et la droite horizontale.

Dans ces conditions, nous pouvons établir directement la signification géométrique du sinus. Nous pouvons en outre voir que la valeur du sinus est liée, instant par instant, à l'ouverture d 'un angle.

ON APPELLE "SINUS" LA HAUTEUR (AH) QU'OCCUPE L'EXTREMITE EXTERNE (A) DU VECTEUR TOURNANT UNITAIRE, SUR LA DROITE HORIZONTALE PASSANT PAR LE CENTRE (P) DE LA ROTATION.

Puisque la hauteur de l'extrémité A, c'est-à-dire le sinus, varie selon la position du vecteur tournant, et donc selon l'ouverture de l'angle φ qui représente cette position, il est évident que l'on peut établir un lien mathématique entre la valeur du sinus et la valeur de l'angle φ.

Or, en indiquant par la lettre y la valeur du sinus et en conservant la lettre φ pour représenter la valeur de l'angle, on peut exprimer le lien entre les deux grandeurs par la formule suivante :

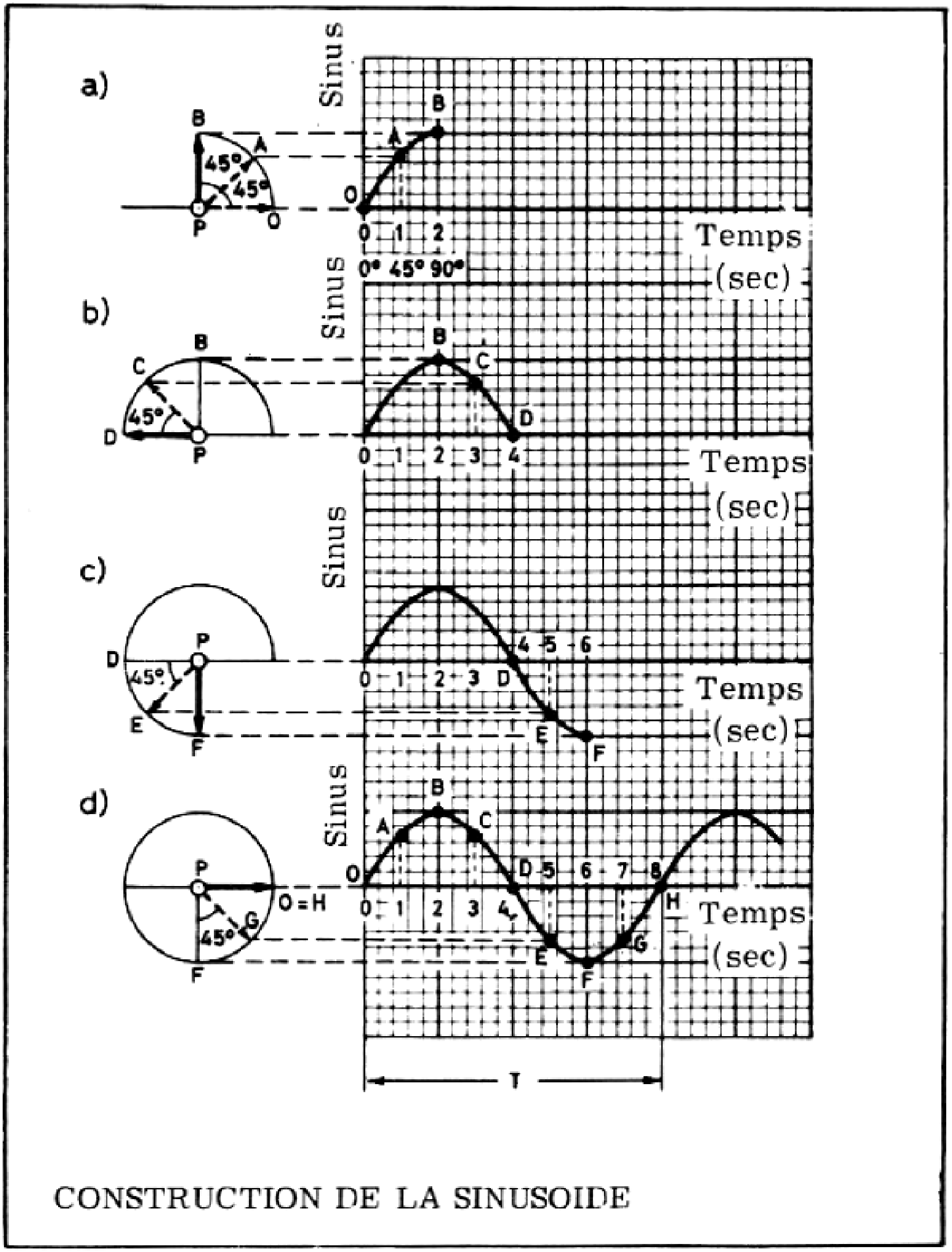
6) $$y = \sin\varphi$$

(qui se lit y égal sinus phi).

La formule que l'on vient d'établir représente d'une manière concise une nouvelle fonction très importante pour l'étude de l'électronique : la FONCTION SINUSOIDALE.

Examinons maintenant l'allure de la fonction sinusoïdale en ayant recours, comme pour les fonctions précédentes, à sa représentation graphique dans le système cartésien.

Sur la figure 8, est illustrée une méthode très simple de construction du graphique de la fonction sinusoïdale.



a)
b)
c)
d)
Sinus
Temps (sec)
0° 45° 90°
45°
O=H
T
CONSTRUCTION DE LA SINUSOIDE

Figure 8

Sur l'axe des abscisses sont représentées les valeurs de l'angle φ décrit par le vecteur tournant, ou, si nous utilisons les mêmes subdivisions sur l'axe, les valeurs du temps mis par le vecteur tournant à décrire ce même angle φ.

Sur la figure 8-a ont été indiqués les temps et sous chaque valeur du temps, on a reporté la valeur de l'angle correspondant. Sur les figures 8-b, 8-c et 8-d afin de simplifier le dessin, on a seulement indiqué les temps, mais il est sous-entendu qu'à chaque valeur de temps correspond toujours une valeur bien définie de l'angle φ.

Sur l'axe des ordonnées sont représentées les valeurs du sinus correspondant à chaque angle φ, donc à chacun des temps mis par le vecteur tournant unitaire pour décrire ce même angle.

Ces valeurs du sinus ne sont toutefois pas indiquées expressément sur l'axe des ordonnées, parce qu'il est plus pratique d'établir la mesure du sinus par un autre moyen.

A cette fin, on a dessiné à côté de chaque diagramme de la figure 8, le vecteur tournant en différentes positions, en plaçant le centre de rotation P au même niveau que l'axe des abscisses.

Sur le dessin ainsi composé, nous pouvons établir directement la mesure du sinus correspondant à chacun des angles φ et à chacun des temps, en traçant les lignes de niveau, passant par l'extrémité externe du vecteur tournant.

Ces lignes de niveau, qui sur la figure 8 sont en pointillé, se trouvent, par rapport à l'axe des abscisses, à une distance égale à la valeur du sinus, et permettent donc de reporter cette valeur du sinus dans le diagramme.

Voyons comment on procède point par point.

Dans la figure 8-a sont indiquées trois positions du vecteur tournant. Au commencement, le vecteur se trouve dans la position horizontale PO, à laquelle correspond la valeur de zéro degré de l'angle et la valeur de zéro seconde du temps. La ligne de niveau qui correspond à cette position, détermine sur le diagramme le point 0 du graphique, lequel point doit coïncider avec l'origine du système d'axes, parce que, à ces valeurs de zéro degré et zéro seconde, correspond précisément la valeur zéro du sinus.

Ensuite le vecteur, après avoir décrit un angle de 45° dans le temps d'une seconde, se trouve dans la position PA. La ligne de niveau qui correspond à cette nouvelle position, détermine dans le diagramme le point A, dont la hauteur sur l'axe des abscisses représente la nouvelle valeur du sinus. Le point A doit se trouver sur la verticale passant par l'axe, qui correspond à 45° et à 1 seconde.

Poursuivant son mouvement, le vecteur tournant arrive à la position PB, après avoir décrit un autre angle de 45°, toujours dans le temps d'une seconde. La ligne de niveau qui correspond à cette dernière position détermine dans le diagramme le point B.

Là aussi la hauteur du point sur l'axe des abscisses représente le sinus et sa valeur d'abscisses correspond à l'angle de 90° décrit complètement par le vecteur tournant, à partir de l'instant initial et correspond au temps de 2 secondes, passé depuis cet instant initial.

Le procédé suivi jusqu'ici se répète pour toutes les positions du vecteur tournant, indiquées respectivement sur les figures 8-b, 8-c et 8-d. En agissant ainsi, on détermine neuf points du graphique, se rapportant à l'allure de la fonction sinusoïdale au cours du premier tour complet du vecteur (0, A, B, C, D, E, F, G, H).

Le graphique a été complété par le tracé de la ligne continue, qui comprend outre les neuf points, les points intermédiaires qui ne sont pas indiqués expressément dans cette construction.

Les lignes présentant une forme semblable à celle que nous venons d'établir, s'appellent des SINUSOIDES ou des ONDES SINUSOIDALES.

Pour construire la sinusoïde, nous nous sommes bornés à examiner le premier tour du vecteur tournant, mais on pourrait étendre, toujours par la même méthode, la ligne du graphique au deuxième tour, au troisième et ainsi de suite.

Chaque graphique se rapportant à un tour complet, suit le précédent et en reproduit exactement la forme. En outre, tous les graphiques occupent sur l'axe des abscisses des intervalles d'une largeur égale à T, appelée PERIODE.

La période est une caractéristique des fonctions sinusoïdales et en général de toutes les fonctions qui présentent régulièrement les mêmes valeurs en des intervalles de temps bien définis, tous égaux entre eux. Ces fonctions s'appellent génériquement des FONCTIONS PERIODIQUES.

Plus loin, nous examinerons deux autres exemples de fonctions périodiques, que l'on peut construire avec des fonctions sinusoïdales.

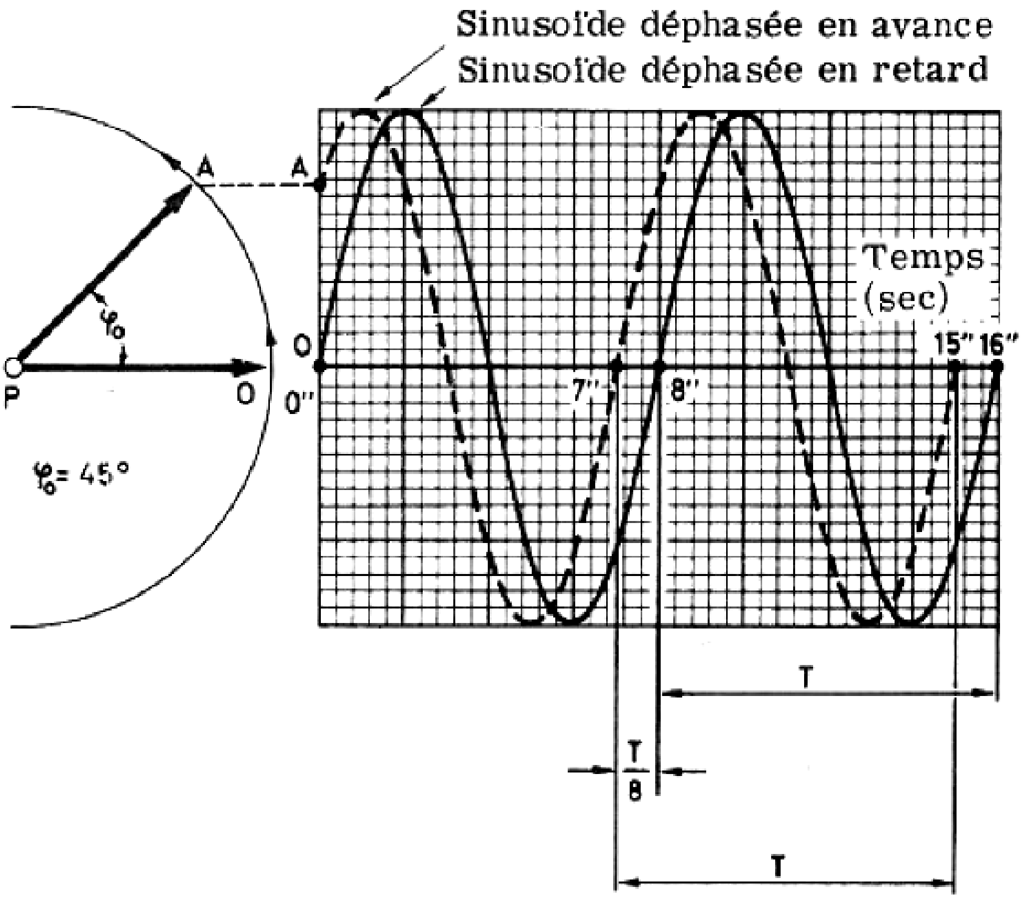
Examinons maintenant le cas particulier de deux fonctions sinusoïdales distinctes, qui se présentent liées entre elles dans le cours d'un même phénomène et qui ont la même période T.

Le cas est illustré sur la figure 9.

Imaginons que deux vecteurs tournants tournent à la même vitesse et que l'un précède l'autre d'un angle φ_0 qui serait, par exemple de 45^o.

Si au commencement le vecteur qui se trouve dans la position PO (figure 9) a un angle de phase égal à zéro degré, l'autre vecteur, qui le précède dans la position PA, doit avoir un angle de phase égal à 45^o.

Puisque les deux vecteurs tournent à la même vitesse, la différence entre les deux phases , $45^o - 0^o = 45^o$, qui se présente au commencement du mouvement conservera toujours la même valeur de 45^o tant que durera le mouvement régulier des vecteurs.



DEPHASAGE DES SINUSOIDES

Figure 9

L'angle ainsi défini s'appelle ANGLE DE DEPHASAGE, ou aussi DIFFERENCE DE PHASE.

Construisons maintenant dans un même diagramme cartésien, comme celui de la figure 9, les sinusoïdes des deux vecteurs.

Les sinusoïdes du vecteur PO commencent au point d'origine 0 du système d'axes, puisque le sinus initial a une valeur égale à zéro (cas étudié dans la figure 8).

L'autre sinusoïde (en pointillé) se rapportant au vecteur PA, a la même largeur et la même période T que la précédente, mais elle commence au point A, soit à une distance de l'origine, égale à la valeur inititale du sinus de l'angle φ.

Pour mieux faire ressortir l'élément qui distingue les deux sinusoïdes entre elles, examinons les graphiques respectifs correspondant à une période T égale à 8".

Pour cela, il nous faut examiner deux intervalles de temps distincts : le premier commence à 7 secondes et correspond au zéro de la sinusoïde en pointillé ; le second commence à 8 secondes et correspond au zéro de l'autre sinusoïde.

En observant les deux graphiques de la figure 9, on voit immédiatement que la période T, correspondant à la sinusoïde en pointillé, se termine à 15 secondes, tandis que la période T équivalente, mais correspondant à l'autre sinusoïde, se termine à 16 secondes.

L'écart entre les deux sinusoïdes, établi pour être de 1 seconde entre le commencement des périodes, s'avère rester constant pendant les temps ultérieurs et on le retrouve inchangé à la fin de ces mêmes périodes.

En examinant cet écart, on peut dire que la sinusoïde en pointillé est en AVANCE par rapport à l'autre, ou que la seconde est EN RETARD.

La valeur de l'avance (ou du retard) dépend de l'ouverture de l'angle de déphasage entre les deux vecteurs tournants, puisqu'il est égal au temps nécessaire aux deux vecteurs pour décrire l'angle φ_0, à savoir l'angle de déphasage.

Habituellement, cette valeur est indiquée sous la forme d'une fraction de la période T : par exemple dans le cas que nous sommes en train d'étudier l'intervalle de 1 seconde qui sépare les deux sinusoïdes est égal à un huitième de la période T (8 s), on dit donc que la SINUSOIDE EN POINTILLE EST DEPHASEE EN AVANCE D'UN HUITIEME DE PERIODE ($\frac{T}{8}$).

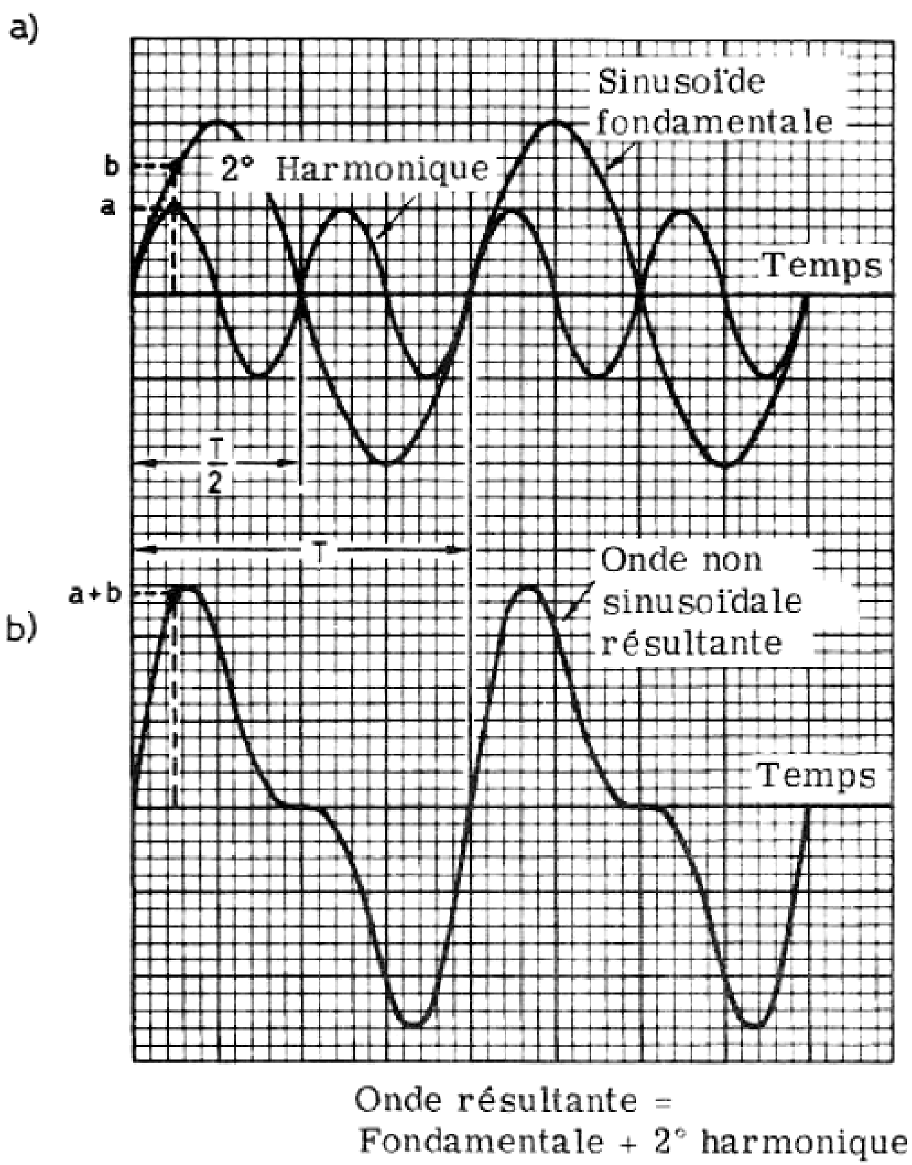
En électronique, il y a de nombreux exemples de grandeurs sinusoïdales déphasées entre elles, l'une étant en avance ou bien en retard par rapport à l'autre ; par exemple les tensions et les courants alternatifs des condensateurs sont déphasés entre eux, ainsi que les tensions et les courants alternatifs des bobines.

1 – 4 – FONCTIONS PERIODIQUES NON SINUSOIDALES

Précédemment, nous avons fait allusion à l'existence des fonctions périodiques.

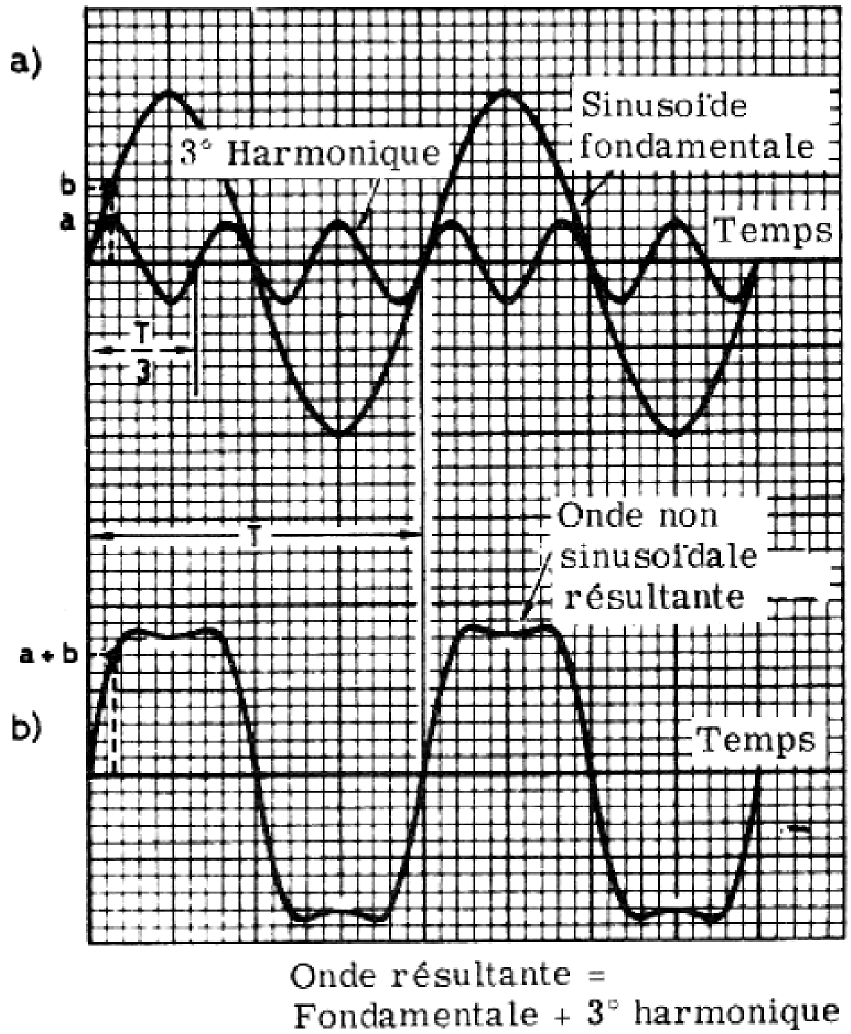
On appelle PERIODIQUES, TOUTES LES FONCTIONS QUI SE RENOUVELLENT REGULIEREMENT DANS LE TEMPS (mêmes ordres, mêmes valeurs dans des intervalles de temps égaux entre eux).

La fonction sinusoïdale constitue l'exemple le plus important de fonction périodique, non seulement parce qu'elle est simple et qu'on peut la ramener facilement a un élément tangible, tel que le vecteur tournant, mais surtout parce que TOUTES LES FONCTIONS PERIODIQUES NON SINUSOIDALES PEUVENT ETRE DECOMPOSEES EN DEUX OU PLUSIEURS FONCTIONS SINUSOIDALES.



FONCTION PERIODIQUE NON SINUSOIDALE

Figure 10



FONCTION PERIODIQUE NON SINUSOIDALE

Figure 11

Pour illustrer cette propriété des fonctions périodiques, nous examinerons deux exemples à partir desquels on peut voir clairement qu'une onde non-sinusoïdale s'obtient en additionnant deux ondes sinusoïdales.

Dans la deuxième leçon de physique, nous avions déjà établi ce que sont les ondes fondamentales et les ondes harmoniques, par rapport à une onde fondamentale donnée.

Il suffira donc de préciser que la seconde harmonique a une période égale à la moitié de la période T de l'onde fondamentale, et que la troisième harmonique a une période égale à un tiers de l'onde fondamentale, comme cela résulte clairement des graphiques respectifs reportés sur les figures 10-a et 11-a.

Examinons tout d'abord l'exemple indiqué sur la figure 10-a.

Si nous additionnons instant par instant les valeurs des ordonnées, qui correspondent à chaque sinusoïde, ces valeurs étant indiquées généralement par les lettres a (pour la deuxième harmonique) et b (pour la fondamentale) et si nous reportons ensuite les valeurs a + b dans un second diagramme (figure 10-b), nous obtiendrons une onde résultante dont le tracé est manifestement différent du tracé sinusoïdal.

La nouvelle onde ainsi construite, présente toutefois un tracé périodique, puisque les deux graphiques compris en deux périodes consécutives, ont exactement la même forme et représentent donc deux suites de valeurs égales, réparties dans le même ordre dans des temps égaux.

La période de l'onde résultante non-sinusoïdale, est égale à la période T de la sinusoïde fondamentale.

Par le même procédé décrit ci-dessus, a été construite l'onde non sinusoïdale, tracée sur la figure 11-b.

Dans ce cas aussi, l'onde résultante est manifestement périodique et sa période est égale à la période T de la sinusoïde fondamentale.

On pourrait citer d'autres exemples, en soustrayant, multipliant et divisant les valeurs correspondant à deux ou plusieurs sinusoïdes. Dans tous les cas possibles, l'onde résultante conserverait toujours sa caractéristique d'onde périodique, c'est-à-dire l'expression d'une fonction périodique.

Par cette leçon se termine l'étude des mathématiques.

Nous retrouverons les notions que nous venons d'exposer, sous une forme quelquefois différente, mais le principe de base restant le même, dans les différents fascicules du cours de Base Electronique.

EXERCICE DE REVISION SUR "MATHEMATIQUES 5"

1) Qu'est-ce que les fonctions mathématiques ?

2) Comment distingue-t-on les variables d'une fonction ?

3) Quand deux grandeurs variables sont-elles directement proportionnelles ?

4) Citez un exemple de fonction linéaire, et indiquez-en la formule.

5) Le graphique d'une fonction linéaire est-il toujours constitué par une droite ?

6) Citez un exemple de fonction exponentielle ?

7) Citez un exemple de fonction logarithmique ?

8) La fonction logarithmique est-elle l'inverse de la fonction exponentielle ?

9) Peut-on comparer la fonction sinusoïdale avec le mouvement circulaire à vitesse constante d'un vecteur tournant ?

10) Les fonctions périodiques peuvent-elles être décomposées en fonctions sinusoïdales ?

REPONSES A L'EXERCICE DE REVISION SUR MATHEMATIQUES 4

1) La puissance d'un nombre est le produit obtenu par la multiplication du nombre par lui-même, une ou plusieurs fois.

2) L'élévation à une puissance est la multiplication de deux ou plusieurs facteurs égaux.

3) Les termes de l'élévation à une puissance sont la base et l'exposant. Dans la forme élémentaire d'élévation à une puissance, la base représente les facteurs égaux et l'exposant représente le nombre de ces facteurs.

4) On écrit le nombre 100.000.000 de la manière suivante, sous la forme d'une puissance de 10 : 10^8.

5) Multiplications :

$10^3 \times 10^6 \times 10 = 10^3 \times 10^6 \times 10^1 = 10^{3+6+1} = 10^{10}$;

$2^2 \times 2^5 \times 2^3 = 2^{2+5+3} = 2^{10}$;

$5 \times 5^6 \times 5 \times 5^4 = 5^1 \times 5^6 \times 5^1 \times 5^4 = 5^{1+6+1+4} = 5^{12}$;

$31 \times 31^6 \times 31^2 \times 31^3 = 31^1 \times 31^6 \times 31^2 \times 31^3 = 31^{1+6+2+3} = 31^{12}$

6) Divisions :

$\frac{10^3}{10} = \frac{10^3}{10^1} = 10^{3-1} = 10^2$; $\frac{10^8}{10^2} = 10^{8-2} = 10^6$;

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 = 1 ; \frac{12^9}{12^9} = 12^{9-9} = 12^0 = 1 ;$$

$$\frac{0{,}3^7}{0{,}3^7} = 0{,}3^{7-7} = 0{,}3^0 = 1 ; \frac{4^3}{4^4} = 4^{3-4} = 4^{-1} = \frac{1}{4} ;$$

$$\frac{0{,}1^5}{0{,}1^7} = 0{,}1^{5-7} = 0{,}1^{-2} = \frac{1}{0{,}1^2} ; \frac{9}{9^3} = \frac{9^1}{9^3} = 9^{1-3} = 9^{-2} = \frac{1}{9^2} ;$$

$$\frac{45^5}{45^2} = 45^{5-2} = 45^3 .$$

7) **Multiplications :**

$3^2 \times 2^2 = (3 \times 2)^2 = 6^2$; $90^3 \times 0{,}1^3 = (90 \times 0{,}1)^3 = 9^3$;

$0{,}05^2 \times 100^2 = (0{,}05 \times 100)^2 = 5^2$;

$50^{23} \times 0{,}5^{23} \times 0{,}5^{23} = (50 \times 0{,}5 \times 0{,}5)^{23} = 12{,}5^{23}$;

$41^8 \times 0{,}02^8 \times 4^8 = (41 \times 0{,}02 \times 4)^8 = 3{,}28^8$.

8) **Divisions :**

$$\frac{30^5}{6^5} = \left(\frac{30}{6}\right)^5 = 5^5 \; ; \; \frac{10{,}1^8}{0{,}1^8} = \left(\frac{10{,}1}{0{,}1}\right)^8 = 101^8 \; ;$$

$$\frac{25^{11}}{5^{11}} = \left(\frac{25}{5}\right)^{11} = 5^{11} \; ; \; \frac{42^2}{6^2} = \left(\frac{42}{6}\right)^2 = 7^2 \; ;$$

$$\frac{16^4}{2^4} = \left(\frac{16}{2}\right)^4 = 8^4 \; ; \; \frac{0{,}7^3}{7^3} = \left(\frac{0{,}7}{7}\right)^3 = 0{,}1^3 \; ;$$

$$\frac{10^{-3}}{2^{-3}} = \left(\frac{10}{2}\right)^{-3} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} \; ;$$

$$\frac{12^{-2}}{3^{-2}} = \left(\frac{12}{3}\right)^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

9) La racine d'un nombre est la base d'une puissance dont on connaît la valeur et l'exposant. La valeur de la puissance correspond au nombre dont on recherche la racine, l'exposant s'appelle l'indice de la racine.

10) Le logarithme d'un nombre est l'exposant d'une puissance dont on connaît la valeur et la base. La valeur de la puissance correspond au nombre dont on cherche le logarithme, la base s'appelle base du logarithme.

REPONSES A L'EXERCICE DE REVISION SUR MATHEMATIQUES 5

1) Les fonctions mathématiques sont des relations de type mathématique entre des grandeurs variables.

2) Dans une fonction, on distingue deux sortes de variables : la variable indépendante qui se trouve habituellement dans le second membre de l'expression mathématique de la fonction, ou qui est représentée sur l'axe des abscisses dans les diagrammes cartésiens et la variable dépendante, qui se trouve habituellement dans le premier nombre de l'expression mathématique ou qui est représentée sur l'axe des ordonnées.

3) Deux grandeurs variables sont directement proportionnelles quand leur rapport est constant, ou lorsque l'une est égale au produit de l'autre par une constante (1er et 2ème critères de proportionnalité directe).

4) L'angle décrit par le rayon vecteur d'une roue, est une fonction linéaire du temps. La formule qui exprime en général cette fonction linéaire est la suivante :

$$\varphi = \omega \times t + \varphi_0$$

(φ = variable dépendante ; ω = vitesse angulaire, constante ; t = variable indépendante ; φ_0 = angle de phase, constant).

5) Dans le diagramme cartésien, le graphique d'une fonction linéaire est toujours constitué par une droite.

6) L'expression $Y = 2^N$ est une fonction exponentielle (Y = variable dépendante; N = variable indépendante).

7) L'expression $N = \log_{10} Y$ est une fonction logarithmique (N = variable dépendante; Y = variable indépendante).

8) Oui. La fonction logarithmique est l'inverse de la fonction exponentielle.

9) Oui. Dans la fonction sinusoïdale, l'angle décrit par le vecteur tournant constitue la variable indépendante : la valeur du sinus qui correspond à chaque angle constitue la variable dépendante.

10) Oui. Toutes les fonctions peuvent être décomposées en fonctions sinusoïdales.