

MATHÉMATIQUES

TOUT LE COURS EN FICHES

Licence 1 • CAPES

MATHÉMATIQUES

TOUT LE COURS EN FICHES

Licence 1 • CAPES

— Claire David

Maître de conférences à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

— Sami Mustapha

Professeur à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Illustration de couverture : © delabo - Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-059992-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

| | |
|--------------------------------|-----|
| Avant-propos | X |
| Comment utiliser cet ouvrage ? | XII |

Partie 1 Calculus

| | |
|--|----|
| Nombres réels | 1 |
| Fiche 1 Les ensembles de nombres | 2 |
| Fiche 2 Intervalles, voisinages, bornes | 6 |
| Limites | 8 |
| Fiche 3 Limite d'une fonction en un point | 8 |
| Fiche 4 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$ | 12 |
| Fiche 5 Propriétés des limites – Opérations sur les limites | 14 |
| Fiche 6 Notations de Landau | 16 |
| Fonctions numériques | 18 |
| Fiche 7 Domaine de définition d'une fonction, graphe | 18 |
| Focus <i>La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind</i> | 21 |
| Fiche 8 Comment définir une fonction ? | 22 |
| Fiche 9 Majorations et minorations | 24 |
| Fiche 10 Fonctions monotones | 26 |
| Fiche 11 Parité, imparité | 28 |
| Fiche 12 Symétries | 30 |
| Fiche 13 Fonctions périodiques | 32 |
| Fonctions usuelles | 33 |
| Fiche 14 Fonctions puissances entières | 33 |
| Fiche 15 Fonctions polynômes et fonction valeur absolue | 35 |
| Focus <i>John Napier et les tables logarithmiques</i> | 38 |
| Fiche 16 La fonction logarithme népérien | 39 |
| Fiche 17 La fonction exponentielle | 41 |
| Fiche 18 Fonctions puissances « non entières » | 43 |
| Focus <i>Leibniz et la fonction exponentielle</i> | 44 |
| Fiche 19 Fonctions circulaires | 45 |
| Fiche 20 Fonctions hyperboliques | 47 |
| Focus <i>L'origine de la trigonométrie</i> | 49 |
| Continuité | 51 |
| Fiche 21 Continuité d'une fonction en un point | 51 |
| Fiche 22 Fonctions continues sur un intervalle | 55 |
| Dérivabilité | 58 |
| Fiche 23 Dérivabilité en un point | 58 |

| | | |
|--|---|-----|
| Fiche 24 | Dérivabilité sur un intervalle | 61 |
| Fiche 25 | Dérivées successives | 65 |
| Fiche 26 | Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle | 67 |
| Fiche 27 | Formule de Taylor-Lagrange | 71 |
| Fonctions réciproques | | 72 |
| Fiche 28 | Fonctions réciproques | 72 |
| Fiche 29 | Les fonctions trigonométriques inverses | 75 |
| Fiche 30 | Les fonctions hyperboliques inverses | 79 |
| Développements limités | | 81 |
| Fiche 31 | Développements limités | 81 |
| Fiche 32 | Formule de Taylor-Young | 84 |
| Fiche 33 | Développements limités usuels | 89 |
| Fiche 34 | Opérations algébriques et composition des développements limités | 92 |
| Développements asymptotiques | | 95 |
| Fiche 35 | Développements asymptotiques | 95 |
| Convexité | | 96 |
| Fiche 36 | Convexité | 96 |
| Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre | | 100 |
| Fiche 37 | Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre homogènes | 100 |
| Fiche 38 | Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre avec second membre | 103 |
| Fonctions de plusieurs variables | | 111 |
| Fiche 39 | Topologie | 111 |
| Fiche 40 | Fonctions de plusieurs variables | 117 |
| Fiche 41 | Les systèmes de coordonnées usuelles | 119 |
| Fiche 42 | Limites, continuité et dérivation | 121 |
| Exercices | | 129 |
| Corrigés | | 133 |

Partie 2 Algèbre

| | | |
|---|---|-----|
| Le plan complexe – Les nombres complexes | | 161 |
| Focus | <i>Les nombres complexes</i> | 162 |
| Fiche 43 | Le corps des nombres complexes | 164 |
| Fiche 44 | Représentation géométrique des nombres complexes | 167 |
| Fiche 45 | Inversion des nombres complexes | 170 |
| Fiche 46 | Propriétés fondamentales des nombres complexes | 172 |
| Fiche 47 | Complément : les polynômes de Tchebychev | 174 |
| Fiche 48 | Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes | 177 |
| Fiche 49 | Factorisation des polynômes dans le corps \mathbb{C} | 180 |
| Fiche 50 | Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples | 185 |

| | | |
|--|--|-----|
| Fiche 51 | Transformations du plan : translations, homothéties | 196 |
| Fiche 52 | Transformations du plan : rotations | 198 |
| Fiche 53 | Transformations du plan : similitudes | 200 |
| Focus | <i>Transformations complexes, fractales, et représentations de la nature</i> | 204 |
| Matrices | | 206 |
| Fiche 54 | Matrices de taille 2×2 | 206 |
| Fiche 55 | Déterminant de matrices de taille 2×2 | 208 |
| Fiche 56 | Matrices de taille 3×3 | 210 |
| Fiche 57 | Déterminant de matrices de taille 3×3 | 213 |
| Fiche 58 | Matrices de taille $m \times n$ | 216 |
| Fiche 59 | Opérations sur les matrices | 218 |
| Fiche 60 | Matrices remarquables | 220 |
| Fiche 61 | Introduction aux déterminants de matrices de taille $n \times n$ | 224 |
| Fiche 62 | Inversion des matrices carrées | 226 |
| Focus | <i>L'origine des matrices</i> | 230 |
| Focus | <i>Les matrices et leurs applications</i> | 232 |
| Fiche 63 | Systèmes linéaires | 234 |
| Fiche 64 | Vecteurs | 238 |
| Fiche 65 | Barycentres | 242 |
| Fiche 66 | Droites, plans | 246 |
| Fiche 67 | Produit scalaire | 249 |
| Focus | <i>Produit scalaire, espaces fonctionnels et calcul numérique</i> | 253 |
| Fiche 68 | Produit vectoriel | 254 |
| Fiche 69 | Aires et volumes | 256 |
| Focus | <i>Géométrie euclidienne – ou non ? Encore des matrices !</i> | 258 |
| Transformations linéaires du plan | | 260 |
| Fiche 70 | Bases et transformations linéaires du plan | 260 |
| Fiche 71 | Changement de base en dimension 2, et déterminant d'une application linéaire | 264 |
| Fiche 72 | Conjugaison – Matrices semblables de taille 2×2 | 266 |
| Fiche 73 | Opérateurs orthogonaux en dimension 2 | 268 |
| Fiche 74 | Rotations vectorielles du plan | 270 |
| Transformations linéaires de l'espace | | 273 |
| Fiche 75 | Bases de l'espace \mathbb{R}^3 | 273 |
| Fiche 76 | Transformations linéaires de l'espace \mathbb{R}^3 | 274 |
| Fiche 77 | Changement de base en dimension 3 | 278 |
| Fiche 78 | Conjugaison – Matrices semblables de taille 3×3 | 280 |
| Fiche 79 | Opérateurs orthogonaux de l'espace \mathbb{R}^3 | 282 |
| Fiche 80 | Rotations vectorielles de l'espace \mathbb{R}^3 | 284 |
| L'espace \mathbb{R}^n | | 286 |
| Fiche 81 | Vecteurs en dimension $n, n \geq 2$ | 286 |

| | | |
|---------------------------|---|-----|
| Fiche 82 | Espace engendré par une famille de vecteurs – Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n | 288 |
| Fiche 83 | Transformations linéaires de l'espace \mathbb{R}^n | 291 |
| Fiche 84 | Changement de base | 295 |
| Fiche 85 | Conjugaison – Matrices semblables de taille $n \times n$ | 297 |
| Fiche 86 | Réduction des matrices carrées | 299 |
| Focus | <i>Groupe spécial orthogonal et cristallographie</i> | 303 |
| Focus | <i>Diagonalisation – La toupie de Lagrange (et de Michèle Audin)</i> | 305 |
| Espaces vectoriels | | 306 |
| Fiche 87 | Les espaces vectoriels | 306 |
| Fiche 88 | Sous-espaces vectoriels | 310 |
| Fiche 89 | Somme de sous-espaces vectoriels | 312 |
| Fiche 90 | Projecteurs, symétries | 313 |
| Exercices | | 315 |
| Corrigés | | 323 |

Partie 3 Analyse

| | | |
|-------------------|---|-----|
| Suites | | 367 |
| Fiche 91 | Qu'est-ce qu'une suite ? L'espace des suites et opérations sur les suites | 368 |
| Fiche 92 | Les différents types de suites | 371 |
| Focus | <i>Suites arithmético-géométriques et finance</i> | 376 |
| Fiche 93 | Étude d'une suite | 377 |
| Fiche 94 | Majorants, minorants d'une suite réelle – Croissance et décroissance | 380 |
| Fiche 95 | Techniques d'étude des suites réelles | 382 |
| Fiche 96 | Convergence | 384 |
| Fiche 97 | Convergence des suites monotones | 387 |
| Fiche 98 | Opérations sur les limites de suites | 389 |
| Fiche 99 | Convergence des suites homographiques réelles | 392 |
| Fiche 100 | Suites extraites | 397 |
| Fiche 101 | Suites de Cauchy | 399 |
| Fiche 102 | Comparaison des suites réelles | 401 |
| Focus | <i>Suites et systèmes dynamiques – L'attracteur de Hénon</i> | 405 |
| Intégrales | | 406 |
| Fiche 103 | Qu'est-ce qu'une intégrale ? | 406 |
| Fiche 104 | Intégrale d'une fonction en escaliers | 408 |
| Fiche 105 | Intégrale d'une fonction continue par morceaux | 413 |
| Fiche 106 | Calcul intégral | 419 |
| Fiche 107 | Primitives de fractions rationnelles | 425 |
| Fiche 108 | Calcul approché d'intégrales | 427 |

| | | |
|----------------------|--|-----|
| Focus | <i>Intégrale de Riemann vs intégrale de Lebesgue</i> | 434 |
| Exercices | | 436 |
| Corrigés | | 442 |
| Annexes | Formulaire de trigonométrie | 470 |
| | Dérivées usuelles | 472 |
| | Dérivées des fonctions réciproques usuelles | 473 |
| | Primitives usuelles | 474 |
| | Limites usuelles des fonctions puissances | 475 |
| | Rang d'une matrice | 476 |
| Bibliographie | | 477 |
| Index | | 479 |

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants du cycle L1 des filières universitaires scientifiques, ou des classes préparatoires. Il se base sur nos cours donnés en première année de Licence à l'UPMC (université Pierre et Marie Curie).

Face aux demandes croissantes de nos étudiants, qui recherchaient un ouvrage de référence complet mais abordable, ainsi que des exercices d'application corrigés, nous nous sommes lancés dans la conception de ce livre qui, nous l'espérons, sera un outil utile pour les générations d'étudiants à venir.

Cet ouvrage est donc le fruit d'un compromis : dans ce volume condensé, nous avons essayé de donner suffisamment d'éléments recouvrant l'ensemble des mathématiques de première année. Cet ouvrage correspond aussi à l'arrivée des nouveaux programmes universitaires et des classes préparatoires. Pour mieux assurer la jonction avec les mathématiques enseignées au lycée, nous avons opté, pour la première partie d'analyse, relative à l'étude des fonctions, à une présentation de type « Calculus », inspirée de l'esprit des « textbooks » anglo-saxons, qui permet d'aborder plus facilement le reste du programme, plus « classique », sur les suites et le calcul intégral. Pour l'algèbre, la présentation reprend celle de l'ouvrage *Calcul Vectoriel* (Collection *Sciences Sup*), en allant un peu plus loin : \mathbb{R}^n , réduction, espaces vectoriels.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction, nous demandons l'indulgence du lecteur pour les éventuelles imperfections qui pourraient subsister ; qu'il n'hésite pas à nous les signaler.

Claire David
Claire.David@upmc.fr

Sami Mustapha
sam@math.jussieu.fr

Remerciements

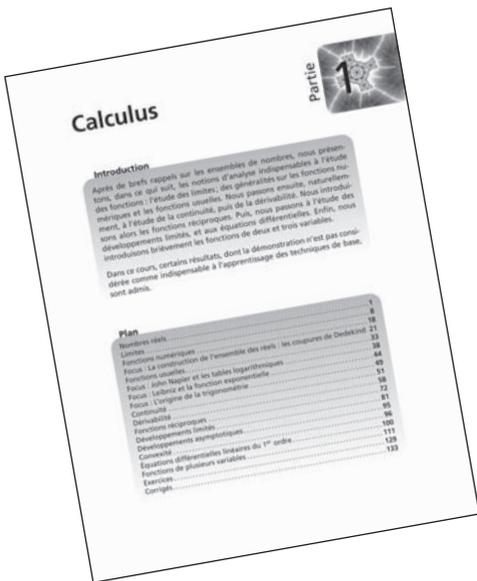
Nous remercions vivement toutes les personnes dont la relecture et les remarques ont contribué à améliorer la version initiale du manuscrit :

les membres du comité de lecture, pour leur relecture extrêmement minutieuse et leurs remarques très pertinentes ;

- Sylvie Benzoni, Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan.
- Laurent Di Menza, Université de Reims, Laboratoire de Mathématiques de Reims (LMR).
- Jean-Pierre Escofier, Université de Rennes, Institut Mathématique de Rennes.
- Sandrine Gachet, Professeur de Mathématiques, Lycée Gustave Eiffel, Dijon.
- Chloé Mullaert, Professeur de Mathématiques, Lycée Paul Valéry, Paris.
- Laure Quivy, ENS Cachan et Université Paris XIII, Centre de Mathématiques et leurs applications (CMLA).
- Lamia Attouche, étudiante à l'UPMC, Paris.
- Alexis Prel, étudiant à l'UPMC, Paris.

mais aussi Albert Cohen, Ramona Anton, Sylvie Delabrière, Patrick Polo, Adnène Benabdesselem, Matthieu Solnon, Eugénie Poulon, Daniel Hoehener, Julien Piera Vest.

Comment utiliser cet ouvrage ?



Un découpage en trois grandes parties : Calculus, Algèbre, Analyse

110 fiches de cours
Les notions essentielles du cours

fiche 1

Les ensembles de nombres

Un ensemble E est une collection d'objets, qui constituent les « éléments » de l'ensemble. Le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini, ou infini.

1. Notation

Pour décrire l'ensemble, on utilise des accolades, à l'intérieur desquelles on écrit les éléments de l'ensemble.

Suivant les cas, on peut, simplement, placer, à l'intérieur des accolades, la liste des éléments de l'ensemble ; ainsi, dans le cas d'un ensemble E avec un nombre fini d'éléments e_1, \dots, e_n , où n est un nombre entier positif, on écrit :

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ou bien, dans le cas d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée \mathcal{P} , on écrit

$$E = \left\{ x \mid \mathcal{P}(x) \right\} \text{ ou encore } \{x, \mathcal{P}(x)\}$$

ce qui désigne ainsi l'ensemble des éléments x tels que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée pour x .

Exemples

- $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres 1, 2, 3 et 4.
- $\{0, 4, 5, 6, \dots\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.
- $\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid x \text{ est impair}\} = \{1, 3, 5\}$.

> Les entiers naturels
L'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls, est noté \mathbb{N} :
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

> Les nombres pairs
L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$:
 $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$

> $k\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$
Étant donné un entier naturel non nul k , $k\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels multiples de k :
 $k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$

> Les entiers relatifs
L'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire des entiers qui sont soit positifs ou nuls, soit négatifs ou nuls, est noté \mathbb{Z} :
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

> $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$
Étant donné un réel non nul a , $a\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels de la forme ak , où k est un entier :
 $a\mathbb{Z} = \{ak, k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple
 $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

> Les nombres rationnels
L'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec $q \neq 0$, est noté \mathbb{Q} .

> Les nombres réels
L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

> \mathbb{R}
L'ensemble $\mathbb{R} \cup]-\infty, +\infty[$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est ce que l'on appelle la « droite réelle achevée », ou encore, l'adhérence de \mathbb{R}).

> La notation « * »
Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « * », cela signifie que l'on exclut 0 ; ainsi, \mathbb{N}^* désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls ; \mathbb{Z}^* désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls ; etc.

> La notation « - »
Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « - », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^+ (qui est aussi égal à \mathbb{N}^*), désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls ; \mathbb{R}^+ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

> La notation « - »
Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « - », cela signifie que l'on ne considère que les nombres négatifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^- (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}^*$), désigne l'ensemble des entiers strictement positifs ; \mathbb{R}^- désigne l'ensemble des réels strictement positifs ; etc.

> La notation « ; »
Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « ; », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^+;$ (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}^*$), désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs ; $\mathbb{R}^+;$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs ; etc.

Propriété
On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

fiche 1

Calculus

Algèbre

Analyse

Nombres réels

Un repérage facile

Les fiches sont regroupées par thème

De très nombreux exemples

Des exercices corrigés pour s'entraîner

Exercices

Pour s'entraîner (solutions p. 123)

Continuité

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f .

2. On considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \in]0, -1, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de φ .

3. On considère la fonction θ définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}, [1, 1, 1] \\ 0 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de θ .

4. On considère la fonction ψ définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de ψ .

5. On considère la fonction ϕ définie par :

$$\phi(x) = E(x) + |x - E(x)|^n$$

Étudier la continuité de ϕ .

6. Soient $A \in]0, 1[$, et f une fonction continue sur l'intervalle $]A, +\infty[$, telle que $f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Soit F la fonction définie sur $]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

6.a) Montrer que F est bien définie sur $]0, 1[$.

6.b) Étudier la continuité de F sur $]0, 1[$.

6.c) Montrer que F est prolongeable par continuité sur $]0, 1[$.

Une équation fonctionnelle

7. Déterminer les fonctions f , définies sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , continues en 0 et en 1 telles que, pour tout réel x :

$$f(x^2) = f(x)$$

Dérivabilité

8. Donner la dérivée de la fonction θ :

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \theta(x) = \cos(x)$$

9. On considère la fonction h_1 définie, pour tout réel x , par $h_1(x) = e^{-x}$. Montrer que h_1 est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et déterminer, pour tout entier naturel non nul n , l'expression de sa dérivée $h_1^{(n)}$.

10. On considère la fonction h_2 définie, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, par :

$$h_2(x) = \frac{1}{1-x}$$

Montrer que h_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et déterminer, pour tout entier naturel non nul n , l'expression de sa dérivée $h_2^{(n)}$.

11. On considère la fonction f définie, pour tout réel x , par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

129

Focus La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind

On parle souvent, dans la littérature mathématique, de la « construction de l'ensemble des réels ». Qu'en est-il ? À l'origine, seuls les nombres entiers et rationnels étaient connus des mathématiciens, même si des irrationnels comme $\sqrt{2}$, lorsque de la diagonale d'un carré de côté 1, sont vite apparus comme des nombres « à part », difficilement quantifiables.

La coupure par un rationnel

La démonstration formelle – ou construction – d'un ensemble de nombres contenant à la fois les entiers, les rationnels, et les non-rationnels, fut mise en œuvre pour la première fois au XIX^e siècle par le mathématicien allemand Richard Dedekind (1818-1901).

Elle est basée sur l'axiome de la borne supérieure, selon lequel toute partie non vide et majorée de l'ensemble \mathbb{R} des réels possède une borne supérieure.

Richard Dedekind est, tout simplement, parti du fait que tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$), découpe \mathbb{Q} , ensemble des nombres rationnels, en deux parties, constituées respectivement par les rationnels strictement plus petits que $\frac{p}{q}$ et par les rationnels supérieurs ou égaux à $\frac{p}{q}$.

La coupure par un irrationnel

En étendant ce principe à une « coupure » comme $\sqrt{2}$, ou à un nombre « non rationnel », qui se trouve « entre les deux », l'ensemble des réels peut être partitionné par les rationnels strictement plus petits que $\sqrt{2}$, et par les rationnels strictement plus petits que $\sqrt{2}$.

Figure 7.A - Une « coupure ».

Ainsi, $\sqrt{2}$ apparaît comme la « coupure » entre ces deux ensembles, c'est-à-dire le nombre « non rationnel » qui se trouve « entre les deux ».

Une autre construction assez populaire de l'ensemble des nombres réels peut être obtenue par l'intermédiaire de suites de Cauchy.

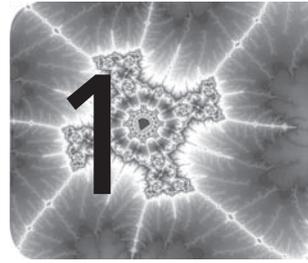
121

Des focus pour découvrir des applications des mathématiques ou approfondir un point du cours

Calculus

Partie

1



Introduction

Après de brefs rappels sur les ensembles de nombres, nous présentons, dans ce qui suit, les notions d'analyse indispensables à l'étude des fonctions : l'étude des limites ; des généralités sur les fonctions numériques et les fonctions usuelles. Nous passons ensuite, naturellement, à l'étude de la continuité, puis de la dérivabilité. Nous introduisons alors les fonctions réciproques. Puis, nous passons à l'étude des développements limités, et aux équations différentielles. Enfin, nous introduisons brièvement les fonctions de deux et trois variables.

Dans ce cours, certains résultats, dont la démonstration n'est pas considérée comme indispensable à l'apprentissage des techniques de base, sont admis.

Plan

| | |
|---|------------|
| Nombres réels | 1 |
| Limites | 8 |
| Fonctions numériques | 18 |
| <i>Focus : La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind</i> | <i>21</i> |
| Fonctions usuelles | 33 |
| <i>Focus : John Napier et les tables logarithmiques</i> | <i>38</i> |
| <i>Focus : Leibniz et la fonction exponentielle</i> | <i>44</i> |
| <i>Focus : L'origine de la trigonométrie</i> | <i>49</i> |
| Continuité | 51 |
| Dérivabilité | 58 |
| Fonctions réciproques | 72 |
| Développements limités | 81 |
| Développements asymptotiques | 95 |
| Convexité | 96 |
| Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre | 100 |
| Fonctions de plusieurs variables | 111 |
| Exercices | 129 |
| Corrigés | 133 |

Les ensembles de nombres

Un **ensemble** E est une collection d'objets, qui constituent les « éléments » de l'ensemble. Le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini, ou infini.

1. Notation

Pour décrire l'ensemble, on utilise des accolades, à l'intérieur desquelles on écrit les éléments de l'ensemble.

Suivant les cas, on peut, simplement, placer, à l'intérieur des accolades, la liste des éléments de l'ensemble ; ainsi, dans le cas d'un ensemble E avec un nombre fini d'éléments e_1, \dots, e_n , où n est un nombre entier positif, on écrit :

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ou bien, dans le cas d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée \mathcal{P} , on écrit

$$E = \left\{x \mid \mathcal{P}(x)\right\} \quad \text{ou encore} \quad \{x, \mathcal{P}(x)\} \quad \text{ou encore} \quad \{x; \mathcal{P}(x)\}$$

ce qui désigne ainsi l'ensemble des éléments x tels que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée pour x .

Exemples

1. $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres 1, 2, 3 et 4.
2. $\{3, 4, 5, 6, \dots\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.
3. $\left\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid x \text{ est impair}\right\} = \{1, 3, 5\}$.

► Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls, est noté \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► Les nombres pairs

L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$$

► $k\mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

Étant donné un entier naturel k , $k\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels multiples de k :

$$k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$$

► Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire des entiers qui sont soit positifs ou nuls, ou négatifs ou nuls, est noté \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► $\alpha\mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$

Étant donné un réel α , $\alpha\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels de la forme αk , où k est un entier :

$$\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple

$$2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

► Les nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec $q \neq 0$, est noté \mathbb{Q} .

► Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

► $\overline{\mathbb{R}}$

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est ce que l'on appelle la « droite réelle achevée », ou encore, l'adhérence de \mathbb{R})

► La notation « \star »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « \star », cela signifie que l'on exclut 0 ; ainsi, \mathbb{N}^\star désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls ; \mathbb{Z}^\star désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls ; etc.

► La notation « $+$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $+$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^+ (qui est aussi égal à \mathbb{N}), désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls ; \mathbb{R}^+ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

► La notation « $-$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $-$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres négatifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^- (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}$), désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls ; \mathbb{R}^- désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

► La notation « \dagger »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « \dagger », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}_\dagger^\star (qui est aussi égal à \mathbb{N}^\star), désigne l'ensemble des entiers strictement positifs ; \mathbb{R}_\dagger^\star désigne l'ensemble des réels strictement positifs ; etc.

► La notation « $\underline{\star}$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $\underline{\star}$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}_\underline{\star}$ (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}^\star$), désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs ; $\mathbb{R}_\underline{\star}$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs ; etc.

Propriété

On a :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où le symbole \subset signifie « inclus dans ».

2. Les ensembles

► Ensemble vide

Un ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide**, et noté \emptyset .

Exemple

$\{n \in 3\mathbb{N}, n \text{ pair}\}$ ne contient aucun nombre : c'est l'ensemble vide.

► Intersection d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **intersection**, notée $E_1 \cap E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E_1 et à E_2 :

$$E_1 \cap E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$$

► Union d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **union**, notée $E_1 \cup E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E_1 , ou à E_2 :

$$E_1 \cup E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$$

► Différence de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **différence**, notée $E_1 \setminus E_2$, est l'ensemble E_1 privé de E_2 :

$$E_1 \setminus E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ et } x \notin E_2\}$$

Exemples

1. $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ est l'ensemble des réels différents de 1 et de 2.
2. $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas multiples de π .

► Complémentaire d'un ensemble

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 tels que E_2 soit inclus dans E_1 (que l'on écrit $E_2 \subset E_1$), l'ensemble $E_1 \setminus E_2$ est le complémentaire de E_2 dans E_1 , noté $\complement_{E_1} E_2$:

$$\complement_{E_1} E_2 = E_1 \setminus E_2$$

Exemple

$$\complement_{\mathbb{R}} \{0\} = \mathbb{R}^*$$

► Produit cartésien de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2$, est l'ensemble des couples d'éléments de la forme (x_1, x_2) , où le premier élément x_1 appartient à E_1 , et le second, x_2 , à E_2 :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Exemples

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in \mathbb{R} \text{ et } x_2 \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des couples de réels.
2. $\mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2), n_1 \in \mathbb{N} \text{ et } n_2 \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des couples d'entiers naturels.

► Produit cartésien de trois ensembles

Étant donnés trois ensembles E_1 , E_2 et E_3 , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2 \times E_3$, est l'ensemble des triplets d'éléments de la forme (x_1, x_2, x_3) , où le premier élément x_1 appartient à E_1 , le second, x_2 , à E_2 , et le troisième, x_3 , à E_3 :

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x_1, x_2, x_3), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \text{ et } x_3 \in E_3\}$$

► Produit cartésien de n ensembles, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, et n ensembles E_1, \dots, E_n , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times \dots \times E_n$, est l'ensemble des n -uplets d'éléments de la forme (x_1, \dots, x_n) , où $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$:

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$$

► Application

Étant donnés deux ensembles E et F , une **application** φ de E dans F associe, à chaque élément de E , un et un seul élément de F . E est l'ensemble de départ, F , celui d'arrivée.

Pour tout élément x de E , l'unique élément de F ainsi mis en relation avec x par l'application φ est noté $\varphi(x)$, et appelé image de x . x est un antécédent de $\varphi(x)$. On écrit :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Exemples

1.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , appelée application identité de \mathbb{N} .

2.

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

est une application de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q} .

► Fonction

Étant donnés deux ensembles de nombres E et F , une **fonction** f de E dans F associe, à chaque élément x de E , au plus un élément de F appelé alors image de x par f (ce qui signifie donc que tous les éléments de E n'ont pas nécessairement une image par f). E est l'ensemble de départ, F , celui d'arrivée. L'ensemble des éléments de E possédant une image par f est appelé domaine de définition de f , et noté \mathcal{D}_f . Elle permet de définir une application de \mathcal{D}_f dans F .

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dont le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Elle permet de définir une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans \mathbb{R} .

Intervalles, voisinages, bornes

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée, appelée **droite des réels**, où il faut pouvoir se repérer. À cet effet, on introduit les notions d'intervalle et de voisinage d'un point.

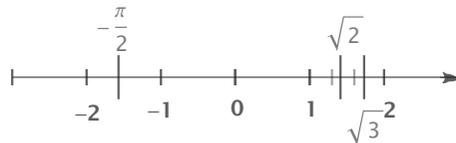


Figure 2.1 - La droite des réels.

1. Intervalles

► Intervalle fermé et borné (ou segment)

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$$

► Intervalle ouvert

On appelle intervalle ouvert tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

ou $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$, $b \in \mathbb{R}$

ou encore $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $a \in \mathbb{R}$

où $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels.

► Intervalle ouvert et borné

On appelle intervalle ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

► Intervalle semi-ouvert et borné

On appelle intervalle semi-ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$

► Intervalle fermé

Par convention, tout ensemble de la forme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

ou $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$, $b \in \mathbb{R}$

est considéré comme étant un intervalle fermé.

► Ensemble vide

L'ensemble, noté \emptyset , qui ne contient aucun nombre réel, est aussi un intervalle, appelé ensemble vide.

► Singleton

On appelle singleton un ensemble ne contenant qu'un seul élément, et qui est donc de la forme $\{a\}$, où a est un nombre réel.

► Intervalle

On appelle intervalle de \mathbb{R} l'un des ensembles définis ci-dessus, ou bien \mathbb{R} tout entier.



Un singleton est un intervalle fermé (le singleton $\{a\}$ est donc assimilé à l'intervalle fermé $[a, a]$).

► Adhérence d'un intervalle

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Son adhérence \bar{I} est l'ensemble tel que :

- si I est un segment, alors $\bar{I} = I$;
- si I est de la forme $]a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\bar{I} = [a, b]$;
- si I est de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$;
- si I est de la forme $] - \infty, a[$ ou $] - \infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} =] - \infty, a] \cup \{-\infty\}$;
- si I l'ensemble vide \emptyset , alors $\bar{I} = \emptyset$.

2. Voisinage

► Voisinage d'un point

On appelle voisinage d'un point a de \mathbb{R} un sous-ensemble de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $]a - \eta, a + \eta[$, où η est un réel strictement positif et tel que $\eta < a$.



On peut étendre la notion de voisinage à $+\infty$ ou $-\infty$; ainsi, un voisinage de $+\infty$ est une partie de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0, +\infty[$, où x_0 est un nombre réel quelconque. De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $] - \infty, x_0[$, où x_0 est un nombre réel quelconque.

3. Les intervalles de \mathbb{R}

Dans ce qui suit, a, b, x_0 sont des réels tels que $a < b$. Le tableau suivant reprend les différents types d'intervalles de \mathbb{R} .

| | |
|------------------------|---|
| $[a, b]$ | Segment |
| $]a, b[$ | Intervalle ouvert et borné |
| $]a, b]$ | Intervalle semi-ouvert et borné (ouvert à gauche, fermé à droite) |
| $[a, b[$ | Intervalle semi-ouvert et borné (fermé à gauche, ouvert à droite) |
| \emptyset | Ensemble vide |
| $\{a\}$ | Singleton |
| $]x_0, +\infty[$ | Voisinage de $+\infty$ |
| $] - \infty, x_0[$ | Voisinage de $-\infty$ |
| $] - \infty, +\infty[$ | \mathbb{R} tout entier |

Limite d'une fonction en un point

1. Limite finie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $\lim_a f = \ell$.

Exemple

On considère la fonction qui, à tout x de $] -1, 1[$, associe $\sqrt{1 - x^2}$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2} = 0$$

► Notation 0^+

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **tend vers 0^+ en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$ ou $\lim_a f = 0^+$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^+ en $+\infty$** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x > A \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim_{+\infty} f = 0^+$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^+ en $-\infty$** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x < -A \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim_{-\infty} f = 0^+$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$



On utilisera aussi la notation 0^+ pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs supérieures.

► Notation 0^-

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **tend vers 0^- en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^-$ ou $\lim_a f = 0^-$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^- en $+\infty$** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x > A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim_{+\infty} f = 0^-$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^- en $-\infty$** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x < -A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim_{-\infty} f = 0^-$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^4 = 0^-$$



On utilisera aussi la notation 0^- pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs inférieures.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0^-$$

► Notation a^+ , $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^+ signifie que l'on tend vers a par valeurs supérieures.

► Notation a^- , $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^- signifie que l'on tend vers a par valeurs inférieures.

2. Limite infinie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite « plus l'infini (on note $+\infty$) » en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_a f(x) = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite « moins l'infini (on note $-\infty$) » en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_a f = -\infty$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

3. Limite finie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^+} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x - 1}) = 2$$

4. Limite finie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus petit que a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^-} f = \ell$.

5. Limite infinie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^+} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a^+} f = -\infty$.

6. Limite infinie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^-} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a^-} f = -\infty$.

Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

1. Limite finie d'une fonction en l'infini

Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$, et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en « plus l'infini (on note $+\infty$) »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

Si f est définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$, et si ℓ désigne encore un réel, on dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en « moins l'infini (on note $-\infty$) »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = 1$$

2. Limite infinie d'une fonction en plus l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

3. Limite infinie d'une fonction en moins l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, en étant négatif, $f(x)$ devient aussi très grand en valeur absolue, en étant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

4. Forme indéterminée

On appelle **forme indéterminée** une limite que l'on ne sait pas déterminer ; cela correspond donc à des quantités que l'on ne peut pas quantifier **de façon exacte**, comme, par exemple, le quotient de $+\infty$ avec $+\infty$.

Propriétés des limites

Opérations sur les limites

1. Propriétés des limites

► Unicité de la limite

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . Si f possède une limite en a , celle-ci est unique.

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Alors, si f est définie dans un voisinage à gauche de a , et dans un voisinage à droite de a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; m et M sont deux réels. Alors :

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < M$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :

$$f(x) < M$$

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > m$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :

$$f(x) > m$$

► Limites et comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; m et M sont deux réels. Alors, **si f et g ont des limites finies en a** , et s'il existe un voisinage \mathcal{V} de a tel que, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

on a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

► Limites et minoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

► Limites et majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \geq g(x)$, et si

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

► Théorème des gendarmes

Soient f et g et h trois fonction définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ est un réel. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$, alors : $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$

2. Opérations sur les limites

► Limite d'une somme de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels finis. Alors :

| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ | $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ |
|-------------------------------|-------------------------------|--|
| ℓ | ℓ' | $\ell + \ell'$ |
| ℓ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| ℓ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | Forme indéterminée |

► Limite d'un produit de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x)$ |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| ℓ | ℓ' | $\ell \ell'$ |
| ℓ , avec $\ell > 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| ℓ , avec $\ell > 0$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| ℓ , avec $\ell < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| ℓ , avec $\ell < 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 0 | $+\infty$ | Forme indéterminée |
| 0 | $-\infty$ | Forme indéterminée |

► Limite d'un quotient de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ |
|-------------------------------|-------------------------------|--|
| ℓ | ℓ' , avec $\ell' \neq 0$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ |
| ℓ | $+\infty$ | 0 |
| ℓ | $-\infty$ | 0 |
| ℓ , avec $\ell > 0$ | 0^+ | $+\infty$ |
| ℓ , avec $\ell > 0$ | 0^- | $-\infty$ |
| ℓ , avec $\ell < 0$ | 0^+ | $-\infty$ |
| ℓ , avec $\ell < 0$ | 0^- | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | Forme indéterminée |
| $+\infty$ | $-\infty$ | Forme indéterminée |
| $-\infty$ | $+\infty$ | Forme indéterminée |
| $-\infty$ | $-\infty$ | Forme indéterminée |

Notations de Landau

1. Négligeabilité

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} .

On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a . On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{=} o(g)$$

On dit que f est un « petit o » de g au voisinage de a .



La notation « petit o », de même que la notation « grand O », qui sera vue plus loin, est appelée **notation de Landau**, en hommage au mathématicien Edmund Landau¹. Leur paternité est visiblement assez controversée, et reviendrait, a priori, à Paul Bachmann².

Exemple

On considère les fonctions f et g définies, pour tout réel x , par

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^4$$

Alors, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on en déduit : $f \underset{+\infty}{=} o(g)$.



Pour traduire le fait qu'une fonction f possède une limite nulle en a , $a \in \mathbb{R}$, ou, éventuellement, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, on écrit aussi :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$$

2. Domination

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a , sans, pour autant, que $g(a)$ soit non nul.

1. Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938), mathématicien allemand, spécialiste de théorie des nombres.
2. Paul Bachmann (1837-1920), mathématicien allemand lui aussi, et également spécialiste de théorie des nombres.