IUT Robert Schuman
Département Chimie

C. Boubel, Mathématiques
2011

Algèbre linéaire – Cours

Les informations à connaître sans hésitation sont sur fond grisé. Les quelques remarques // en plus petits caractères // ne sont pas indispensables à la compréhension.

I Espaces vectoriels

I.1 Espaces vectoriels

Définition Un ensemble de vecteurs, dit *« espace vectoriel »* est un ensemble de choses que l'on peut :

– additionner entre elles,

– multiplier par des nombres,

avec toutes les propriétés naturelles de cette addition et de cette multiplication (existence d'un vecteur nul, associativité de +, distributivité *etc.* [1])

Autrement dit, les vecteurs sont « presque » des nombres ; ils sont comme des nombres, sauf qu'ils ne se multiplient pas entre eux. Les propriétés des vecteurs sont les propriétés d'addition et de multiplication des vecteurs du plan ou de l'espace, que vous connaissez bien et qui se traduisent par des dessins.

Cependant, dès qu'un ensemble d'objets mathématiques vérifie cette double propriété, c'est un ensemble de « vecteurs », que ces derniers correspondent à des vecteurs du plan ou de l'espace au sens intuitif, ou pas. Je choisis délibérément le terme très vague d'« objets », tant les vecteurs et les espaces vectoriels peuvent être présents à travers des réalités très diverses, en mathématiques et en sciences.

Remarque. Ce n'est jamais un objet seul qui est ou n'est pas un vecteur, mais un *ensemble d'objets*, que l'on peut additionner *entre eux etc.*, qui est alors un *ensemble de vecteurs* : un espace vectoriel.

Exemples. *Exercice* : trouver des exemples.

Vocabulaire. L'algèbre linéaire est l'étude des propriétés des espaces vectoriels et de tous les concepts construits à partir d'eux.

Remarque. Dans le 2$^{\text{ème}}$ tiret de la définition, je n'ai pas précisé si les nombres en question sont réels ou complexes. Le plus souvent pour vous, il s'agit de nombres réels, et donc d'un « espace vectoriel réel ». Vous pourrez parfois rencontrer des ensembles d'objets pouvant être multipliés par des nombres complexes. Il s'agira d'« espaces vectoriels complexes ». Les fonctions d'onde des électrons, en atomistique, sont par exemple des éléments d'un tel espace.

Vocabulaire. En algèbre linéaire, il est courant d'appeler les nombres des *scalaires*, du latin *scala*, échelle. En effet, les nombres (réels) s'ordonnent des plus petits vers les plus

1. Voici la liste complète exacte de ces propriétés. **(a1)** L'addition est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$. **(a2)** L'addition est commutative : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$. . **(a3)** Il existe un vecteur, dit vecteur nul, noté $\vec{0}$, tel que $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}$. **(a4)** Tout vecteur $\vec{u}$ a un opposé, noté $-\vec{u}$, tel que $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$. **(b1)** $1.\vec{u} = \vec{u}$. **(b2)** $\alpha.(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$. **(b3)** $(\alpha+\beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u}+\beta.\vec{u}$. **(b4)** $\alpha.(\beta.\vec{u}) = (\alpha\beta).\vec{u}$.

grands, comme le long d'une échelle. Cela les différencie des vecteurs[2]. // Aujourd'hui, on appelle « scalaire » tout nombre, par opposition à un vecteur, même dans le monde des espaces vectoriels complexes où les nombres sont des nombres complexes. //

On note souvent les scalaires par des lettres grecques, contrairement aux vecteurs, notés par des lettres latines, parfois surmontées d'une flèche : $\overrightarrow{u}$ ou grasses : $\boldsymbol{u}$.

Vocabulaire. Si E est un espace vectoriel, et si F est un sous ensemble de E qui est lui aussi un espace vectoriel (pour les mêmes addition et multiplication), on dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E. *Exemples* : parmi les vecteurs E de l'espace, l'ensemble F des vecteurs horizontaux, ou celui F' des vecteurs verticaux, sont des sous-espaces vectoriels de E, mais ni le sous-ensemble S des vecteurs de norme égale à un, ni le sous-ensemble A des vecteurs dont la coordonnée verticale vaut 1, ne le sont.

D'autres exemples : voir l'exercice 1 de la feuille d'exercices.

I.2 Combinaisons linéaires

L'opération fondamentale effectuée sur des vecteurs est la combinaison linéaire.

Définition Si $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ sont des vecteurs, et si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires, alors on dit que le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{u_i}}$$

est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$.

Il est fabriqué à partir des $\overrightarrow{u_i}$, à l'aide des deux opérations possibles sur des vecteurs : multiplication par des nombres et addition entre eux. **Toute l'algèbre linéaire repose sur cette notion.**

Trois notions également fondamentales sont alors tirées de celle de combinaison linéaire.

(i) Vecteurs engendrés, familles génératrices. Si un certain vecteur $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$, on dit que $\overrightarrow{w}$ est *engendré*, ou *linéairement engendré*, par les vecteurs $\overrightarrow{u_i}$.

Propriété/Définition Dans un espace vectoriel E, l'ensemble de tous les vecteurs engendrés par les vecteurs donnés $\overrightarrow{u_i}$ est un sous-espace vectoriel de E. Si ce sous-espace est E tout entier, on dit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ *engendre* E, ou est *génératrice* de E.

Exercice Donner des vecteurs de l'espace tels que le sous-espace qu'ils engendrent est le sous-espace F des vecteurs horizontaux, ou celui F' des vecteurs verticaux.

Sur un dessin, l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ est l'espace correspondant au « quadrillage » qui se construit à partir d'eux.

---

2. Selon l'*Oxford English Dictionary*, cette terminologie a été probablement introduite par le mathématicien et physicien irlandais William Rowan Hamilton en 1846. En construisant les *quaternions*, une sorte de généralisation des nombres complexes, il a appelé « scalaire » leur partie réelle. Il explique que les nombres réels se rangent de gauche à droite comme le long d'une échelle, alors qu'on ne peut ordonner ainsi les nombres complexes ou les quaternions : *the algebraically real part may receive, according to the question in which it occurs, all values contained on the one scale of progression of numbers from negative to positive infinity ; we shall call it therefore the scalar part.* Cette information a été trouvée *via* wikipedia.

(ii) Familles libres ou liées. Supposons donnée une famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ de vecteurs.

Définition On dit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est *liée* si l'*un* des $\overrightarrow{u_i}$ est combinaison linéaire des autres :

$$\overrightarrow{u_j} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_{j-1}\overrightarrow{u_{j-1}} + \alpha_{j+1}\overrightarrow{u_{j+1}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \alpha_i\overrightarrow{u_i}$$

pour certains α_i bien choisis.

Dit en termes imagés, la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est dite liée dès qu'on peut fabriquer un des $\overrightarrow{u_i}$ à partir des autres (par les opérations qui existent sur les vecteurs : multiplication par des nombres et addition entre eux).

Définition Inversement, on dit que la famille est *libre*, ou *linéairement indépendante*, si *aucun* de ses vecteurs $\overrightarrow{u_i}$ n'est combinaison linéaire des autres.

La seule manière de montrer qu'une famille est liée est donc de montrer qu'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres. Pour montrer qu'une famille est libre, il faut montrer qu'aucun de ses vecteurs ne l'est.

Exercice et remarque Ceci revient à montrer que, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$, alors c'est que tous les α_i sont nuls. Cette dernière propriété est la définition standard d'une famille libre. J'ai présenté plus haut une variante de cette définition, un peu plus lourde à exprimer et à vérifier, mais peut-être plus parlante.

Le fait que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ soit libre ou liée apparaît aussi sur un dessin, si l'on peut dessiner la famille. En effet, dire que $\overrightarrow{u_j}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, c'est dire qu'il appartient au sous-espace engendré par eux, ce qui peut se lire sur un dessin. Cette remarque dessinatoire permet de comprendre la notion, cependant un dessin est très rarement une preuve : pour *prouver* qu'une famille est libre, on utilise le critère donné juste au-dessus avec les α_i.

Remarque et exercices importants sur la *taille* des familles libres ou génératrices Ces exercices permettent de s'approprier les deux notions introduites et de comprendre la suite. Les réponses possibles sont OUI/NON/ÇA DÉPEND. Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ une famille génératrice d'un espace vectoriel $E\cdot$ On lui ajoute un certain vecteur $\overrightarrow{u_{n+1}}$. Est-elle encore génératrice ? Et si on lui retire un des $\overrightarrow{u_i}$?

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ une famille libre d'un espace vectoriel $E\cdot$ On lui ajoute un certain vecteur $\overrightarrow{u_{n+1}}$. Est-elle encore libre ? Et si on lui retire un des $\overrightarrow{u_i}$?

Ce qui est donc plutôt difficile à obtenir, ce sont des familles génératrices petites, c'est-à-dire comprenant un petit nombre de vecteurs, et de grandes familles libres, c'est-à-dire composées d'un grand nombre de vecteurs. Ceci conduit au paragraphe suivant.

(iii) Bases, et par là dimension d'un espace vectoriel, coordonnées. On peut à présent définir ce qu'est une base, dont vous avez déjà pu entendre parler en lycée. L'exercice qui précède donne envie de regarder les familles délicates à obtenir : les familles libres de taille maximale, c'est-à-dire qui cessent d'être libres si on leur ajoute un nouveau vecteur, et les familles génératrices de taille minimale, c'est-à-dire qui cessent d'être génératrices si on leur ôte un vecteur. Peut-être sont-elles remarquables ? La réponse (admise) est oui, en cela que ce sont *les mêmes* : une famille libre maximale est alors aussi génératrice, et génératrice minimale, et une famille génératrice minimale est alors également libre, et libre maximale. On donne un nom à ces familles remarquables.

Propriété/Définition On appelle *base* de E une famille de vecteurs qui est (les trois conditions sont équivalentes) :

– à la fois *libre* et *génératrice de* E,

– *libre de taille maximale* (si on ajoute encore un vecteur, elle devient liée),

– *génératrice de taille minimale* (si on lui retire un vecteur, elle cesse d'être génératrice).

Il se produit alors en outre le fait remarquable suivant. Vous pourriez en comprendre la démonstration, mais je la passe car ce n'est pas l'essentiel pour vous.

Théorème Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Définition On appelle ce nombre la *dimension* de E.

Exercice. Vérifier que les bases de la droite $\mathbb{R}$ ont un vecteur, que celles du plan $\mathbb{R}^2$ en ont deux et celles de l'espace $\mathbb{R}^3$ trois. La notion de dimension, qu'on vient de définir mathématiquement, correspond donc bien à la notion intuitive de dimension.

Si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est une base de E et $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de E, alors $\overrightarrow{u}$ s'écrit *d'une seule manière* comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{u_i}$ (facile – admis) :

$$\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{u_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{u_i}.$$

Vous connaissez déjà le vocabulaire suivant.

Vocabulaire Les nombres x_i sont les *coordonnées* de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$.

Il apparaît donc qu' en dimension d, les vecteurs ont d coordonnées.

Vecteurs vus sous forme de colonnes de chiffres. Si E est un espace où les familles libres peuvent avoir un nombre *infini* de vecteurs (cela existe, mais vous en rencontrerez rarement, sauf en mécanique quantique), on dit que E est de dimension infinie. Sinon, les familles libres ne dépassent pas un certain nombre maximal n de vecteurs. Les familles libres à exactement n vecteurs sont les bases : E est de dimension n. On peut alors représenter les vecteurs de n'importe quel espace vectoriel de dimension n comme des colonnes de n chiffres : la colonne de leurs coordonnées dans une base fixée. Souvent d'ailleurs, une base est plus naturelle que les autres et est sous-entendue. Alors :

$$\text{si } \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \alpha\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

// **Remarque en passant.** La définition ci-dessus ne limite absolument pas la dimension à trois. Il se trouve qu'on a une bonne intuition des espaces vectoriels jusqu'à la dimension trois, parce qu'ils correspondent à une réalité physique usuelle et qu'on *peut faire des dessins*. Des espaces de dimension quatre, cinq, *etc.*, et même de dimension infinie se définissent cependant sans plus de difficulté que ceux de dimension un, deux ou trois. Mathématiquement, cela ne fait pas de différence. Simplement, on ne peut plus faire de dessin. *Exemple.* Quelle est la dimension de l'espace des colonnes de données sur les mètres carrés construits, dans l'exercice 1 de la feuille d'exercices ? //

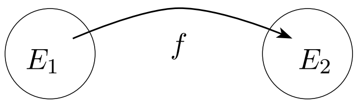
Propriété/Remarque sur les familles libres On verra en exercice que le concept de famille libre est un peu délicat. Une façon, cependant de comprendre ce qu'est une famille libre, d'en construire une ou de s'assurer qu'une famille est libre, est d'utiliser la propriété suivante (admise) : une famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est libre si et seulement si $\overrightarrow{u_1} \neq \overrightarrow{0}$, et $\overrightarrow{u_2}$ n'est pas engendré par $\overrightarrow{u_1}$, et $\overrightarrow{u_3}$ n'est pas engendré par $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ *etc.* jusqu'à $\overrightarrow{u_n}$.

Exercice : familles libres en dimension un, deux et trois. Vérifier les propriétés utiles suivantes. En dimension un, une famille est libre, c'est un seul vecteur, non nul — ou la famille vide. En dimension deux, ce sont deux vecteurs non colinéaires — ou un seul non nul, ou la famille vide. En dimension trois, ce sont trois vecteurs non coplanaires — ou deux non colinéaires, ou un seul non nul, ou la famille vide.

II Applications linéaires

II.1 Définition

Soit E_1 et E_2 deux espaces vectoriels et f une application de E_1 dans E_2.



On dit que f est *linéaire* si *elle ne perturbe pas la combinaison linéaire*, c'est-à-dire la multiplication des vecteurs par un nombre et l'addition des vecteurs entre eux, les deux opérations définies sur les vecteurs. Plus précisément, appliquer à des vecteurs *d'abord* f, *puis* une combinaison linéaire, ou *d'abord* cette combinaison linéaire, *puis* f, revient au même :

Définition f est dite linéaire si pour tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, α et β : $f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$.

Ceci s'exprime aussi dans le schéma :

	E_1	Horizontalement : on applique f.	E_2
	$\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$	$\rightarrow$	$f(\overrightarrow{u}),\ f(\overrightarrow{v})$
Verticalement : on effectue une combinaison linéaire.	$\wr$		$\wr$
	$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$	$\rightarrow$	$\alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$ $= f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v})$

où effectuer $\rightarrow$ puis $\wr$ ou $\wr$ puis $\rightarrow$ revient au même.

Caractérisation. Si on choisit de représenter les vecteurs comme des colonnes de nombres, on peut montrer que cette définition revient au même que la propriété suivante.

Propriété En notant $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les vecteurs de l'espace de départ, alors f est linéaire si et seulement si chaque coordonnée de f se calcule en :

- multipliant chaque x_i par un nombre,
- faisant la somme du tout,

c'est-à-dire que $f(\overrightarrow{u})$ est un vecteur dont chaque coordonnée est du type $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$: une *combinaison linéaire* des coordonnées x_i de $\overrightarrow{u}$.

Bien sûr, il est toujours nécessaire de préciser *en quelles variables* f est linéaire. Par exemple, si $f = 2U \ln K + V/(\lambda_1\lambda_2)$, alors f est linéaire si on la considère comme fonction de U et V, mais pas si on la considère comme fonction de λ_1 et λ_2 et/ou de K.

Phénomènes physiques linéaires. La linéarité a une vie hors des mathématiques. Elle est un concept important en sciences. On appelle linéaires des phénomènes où une grandeur est fonction linéaire de certains paramètres. En simplifiant, ce sont les phénomènes où la fonction f qui à une cause associe son effet, est linéaire. Si on ajoute deux causes, l'effet produit est la somme des effets : si $f(\text{cause1}) = \text{effet1}$ et $f(\text{cause2}) = \text{effet2}$, alors $f(\text{cause1} + \text{cause2}) = \text{effet1} + \text{effet2}$; si on augmente une cause, l'effet est augmenté d'autant : $f(\lambda.\text{cause1}) = \lambda.\text{effet1}$. On dit que les effets se *superposent.* Les propriétés mathématiques des applications linéaires donnent alors des outils pour étudier ces phénomènes.

Exemples. (i) En électricité, le courant à travers un circuit résistant est fonction linéaire de la tension appliquée : $I = \frac{1}{R}U$. Si vous montez deux générateurs en série, l'intensité est la somme des deux intensités qu'aurait entraînées chacun, seul. Ici en outre, la linéarité est simplement une proportionnalité.

(ii) Dans une réaction chimique à cinétique linéaire, *i.e.* régie par une équation différentielle linéaire, qu'on laisse se dérouler pendant un temps T, alors si on modifie au départ la concentration en réactifs (« λ.cause »), la concentration en produits au temps T est modifiée de la même façon (« λ.effet »). Ainsi, deux fois plus de réactifs donnent, au temps T, deux fois plus de produits. Ce n'est pas le cas dans les réactions de cinétique non linéaire.

(iii) Le vecteur d'étirement $\overrightarrow{L}$ d'un ressort est fonction linéaire de la force appliquée : $\overrightarrow{L} = -K\overrightarrow{F}$, avec K la raideur du ressort. Ici encore, la linéarité est une simple proportionnalité, mais en trois dimensions.

(iv) La propagation des ondes sonores ou lumineuses est un phénomène linéaire remarquable et universel. Les ondes sonores produites par deux sources de son $S1$ et $S2$, sont la somme des ondes qu'aurait produites chacune $S1$ et $S2$, seule : les ondes se *superposent.* Ou encore, L'onde produite par la source $S1$ dont on a multiplié la puissance par λ, est d'amplitude multipliée par λ. Les ondes sonores respectent la combinaison linéaire des sources de son : la propagation des ondes est un phénomène linéaire. Mathématiquement, l'*équation des ondes*, qui régit cette propagation, est linéaire. Le contraire serait déroutant : en présence d'une source de son $S1$, émettre un autre son perturberait les ondes émises par $S1$, sans simplement se superposer à elles.

Ici il s'agit d'une linéarité qui n'est pas une simple proportionnalité comme dans les exemples précédents.

(v) Au contraire, un exemple de phénomène non linéaire sont les turbulences dans les écoulements. En simplfiant abusivement, la turbulence engendrée par deux obstacles à un écoulement *n'est pas* la somme, ou superposition, des turbulences qu'aurait produites chacun des obstacles, seul. Ou encore, si on multiplie par λ la taille d'un obstacle, la turbulence provoquée *n'est pas* la turbulence initiale, d'intensité multipliée par λ (si cela a un sens ...), mais souvent quelque chose de beaucoup plus compliqué, de forme différente. Les turbulences ne respectent pas la combinaison linéaire des causes qui les produisent, quel que soit le sens qu'on peut donner à cette notion. La turbulence n'est pas un phénomène linéaire. Notamment, l'énergie dissipée n'est pas fonction linéaire de la vitesse de l'écoulement *etc.*

(vi) L'exemple typique d'un phénomène non linéaire sont les *frottements.* Quand la vitesse v d'une voiture double, l'intensité F du frottement dans l'air ne double pas, mais plutôt, comme $F \simeq k.v^2$, quadruple. Le frottement solide a aussi un comportement fortement non linéaire. Si on pousse une chaise avec une force $\overrightarrow{F}$ faible, son mouvement est nul (donc la variation de réaction du support vaut $-\overrightarrow{F}$ et compense exactement $\overrightarrow{F}$). Mais si on exerce

$2\overrightarrow{F}$, il se peut qu'elle se mette soudain en mouvement (et on sent qu'une fois le mouvement établi, le frottement diminue fortement, d'où un phénomène possible d'hystérésis : la chaise peut demeurer en mouvement lorsqu'on ramène la force à $\overrightarrow{F}$). Ce ne serait pas le cas si le frottement dépendait linéairement de $\overrightarrow{F}$.

⫽ **(vii)** Semblablement aux ondes, la conduction thermique est un phénomène linéaire remarquable et universel. Si on chauffe (sans phénomène de convection) un objet simultanément de plusieurs manières (« cause1, cause2, … »), sa température, à chaque endroit, est la somme des températures qu'on aurait obtenues avec chacun de ces chauffages, indépendamment : $T = T_1 + T_2 + \ldots$: « effet1+effet2+… ». Là encore, l'*équation de la chaleur*, qui régit mathématiquement la propagation de la chaleur, est une équation linéaire. ⫽

II.2 Intermède technique : matrices

Ce paragraphe est une parenthèse introduisant de manière purement technique des objets dont on va avoir besoin, les *matrices*. Il n'y a pour le moment rien à comprendre, seulement à apprendre.

Définition/Propriété Une *matrice* est un tableau rectangulaire de chiffres , ici à p lignes et q colonnes.

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,q} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,q} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & \cdots & m_{3,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & m_{p,3} & \cdots & m_{p,q} \end{pmatrix}, \quad \text{notée en bref } M = (m_{i,j})_{i=1}^{p}\,{}_{j=1}^{q}.$$

Si λ est un scalaire et M' une autre matrice de même taille, on définit alors les matrices $\lambda M = (\lambda m_{i,j})_{i=1}^{p}\,{}_{j=1}^{q}$ et $M+M' = (m_{i,j}+m'_{i,j})_{i=1}^{p}\,{}_{j=1}^{q}$, comme pour les vecteurs, par multiplication ou addition coordonnée par coordonnée. Ces opérations se comportent « bien », c'est-à-dire font de l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes un espace vectoriel.

Exercice Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

Définissons maintenant une opération essentielle sur les matrices : leur *produit*.

Définition Soit M une matrice à p lignes et q colonnes, et M' une matrice à p' lignes et q' colonnes. $\boxed{\text{Si } q = p'}$, on définit le produit $M'' = M.M'$ comme la matrice à p lignes et q' colonnes suivante (exemple avec $p = 3$, $q = p' = 2$, $q' = 2$) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} m'_{1,1} & m'_{1,2} \\ m'_{2,1} & m'_{2,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ m_{3,1} & m_{3,2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m''_{1,1} & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Le coefficient $m''_{1,1}$ vaut $m_{1,1}.m'_{1,1}+m_{1,2}.m'_{2,1}$. Il s'obtient à partir de la ligne correspondante de M et de la colonne correspondante de M'. On fait le produit des coefficients reliés par les pointillés, et on somme le tout.
On procède ainsi pour tous les coefficients de M'' : $m''_{i,j} = \sum_{k=1}^{q(=p')} m_{i,k}.m'_{k,j}$.

Attention, si $q \neq p'$, c'est-à-dire si les tailles des matrices ne s'enchaînent pas correctement comme sur le dessin, leur produit n'est *pas défini*. Par exemple, les deux produits $M.M'$ et $M'.M$ ne sont définis simultanément que si M et M' sont carrées de même taille.

Pour calculer le produit $M.M'$, procéder *obligatoirement* ainsi : disposer M en bas à gauche, M' en haut à droite, et pour obtenir chaque coefficient du produit, suivre de la main gauche la ligne correspondante de M, de la main droite la colonne correspondante de M', et additionner les produits successifs.

Propriétés du produit Ce produit a les même propriétés que produit des nombres, sauf deux. Il est associatif : $(M.M').M'' = M.(M'.M'')$, distributif par rapport à l'addition : $M.(M' + M'') = M.M' + M.M''$, il a un élément neutre qu'on verra plus bas *etc*[3] mais :

– Le produit des matrices carrées de taille fixée n'est **pas commutatif** : en général, $M.M' \neq M'.M$. L'ordre dans le produit a donc de l'importance, vous n'en avez pas l'habitude avec le produit de nombres. Prêtez-y attention.

– On verra plus bas qu'**on ne peut pas « diviser » par n'importe quelle matrice non nulle**, alors qu'on peut diviser par tout nombre non nul.

Les matrices sont donc une sorte de généralisation des nombres avec leurs opérations d'addition et de produit. Elles possèdent beaucoup de leurs propriétés, mais pas toutes.

Produit d'une matrice et d'un vecteur On a vu plus haut qu'un vecteur peut se représenter par la colonne de ses coordonnées, c'est-à-dire par une matrice à une seule colonne. Si M est une matrice et $\overrightarrow{v}$ un vecteur réprésenté sous cette forme, le produit $M.\overrightarrow{v}$, si les tailles concordent, est simplement un cas particulier de multiplication de matrices. Son résultat est une matrice à une colonne, c'est-à-dire un vecteur.

II.3 Représentation matricielle d'une application linéaire

Observation préliminaire Si M est une matrice à p lignes et q colonnes, on peut définir l'application « multiplication par M », $\overrightarrow{v} \mapsto M.\overrightarrow{v}$ sur les vecteurs-colonnes $\overrightarrow{v}$. Quelle doit être la taille de $\overrightarrow{v}$? Quelle propriété cette application vérifie-elle ?

Soit à présent f une application linéaire de E_1 dans E_2, deux espaces vectoriels. On a vu en II.1 que chacune des coordonnées de $f(\overrightarrow{v})$ est combinaison linéaire des coordonnées $\overrightarrow{v}$. Par exemple :

$$\text{notons } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ alors } f(\overrightarrow{v}) = f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ 5x \quad - z \end{pmatrix},$$

(*Exercice :* ici, quelle sont les dimensions de E_1 et de E_2 ?), alors f est codée par une matrice, notée ici F, c'est-à-dire que :

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = F.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ avec (\textit{exercice !}) } M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice et observation fondamentale On remarque que le vecteur $f(\overrightarrow{v})$ est le produit $F.\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{v}$ par une certaine matrice F. Laquelle ? On dit que la matrice F code, ou représente, l'application linéaire f. Ce codage ou cette représentation fonctionne pour toutes les applications linéaires :

Toute application linéaire f se code par une matrice F : si $\overrightarrow{v}$ est représenté par la colonne de ses coordonnées, $f(\overrightarrow{v}) = F.\overrightarrow{v}$. Vous devez savoir établir sans peine la correspondance.

3. D'autres propriétés paraissent tellement évidentes qu'on peut ne pas s'apercevoir qu'elles pourraient ne pas être vérifiées, et qu'on doit s'en assurer. Par exemple, l'associativité et la commutativite avec la multiplication par les scalaires : $\lambda(M.M') = ((\lambda M).M') = (M.(\lambda M'))$, ou encore $(\lambda\mu).M = \lambda(\mu M)$.

Exercice Si une certaine application linéaire f est codée par une matrice F qu'on vous donne, quelles sont les dimensions des espaces d'arrivée et de départ ?

Lien avec le produit de matrices Il est naturel. Si f de E dans E' et g de E' dans E'' sont deux applications linéaires, codées par les matrices F et G, alors l'application $g \circ f : \overrightarrow{v} \mapsto g(f(\overrightarrow{v}))$ est encore linéaire (*Exercice :* c'est-à-dire ? Le vérifier), et codée par la matrice produit $G.F$.

Si :	$f : E \to E'$	est codée par F
et :	$g : E' \to E''$	est codée par G,
alors :	$g \circ f : E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E''$	est codée par $G.F$.

Là est l'origine du produit inattendu introduit au paragraphe précédent.

Attention, cette multiplication n'est définie que si le nombre de colonnes de G est égal au nombre de lignes de F (inutile de retenir par cœur, cela se voit quand on essaie de calculer le produit) ; par ailleurs, si les produits $G.F$ et $F.G$ existent tous les deux, ils ne sont *pas forcément égaux* car $f(g(\overrightarrow{v}))$ et $g(f(\overrightarrow{v}))$ ne le sont pas forcément.

Les propriétés du produit de matrices apparaissent alors naturelles. Par exemple, $F.(G.\overrightarrow{v}) = (F.G).\overrightarrow{v}$ car $f(g(\overrightarrow{v})) = (f \circ g)(\overrightarrow{v})$.

Dans toute la suite, on considère uniquement les matrices carrées de taille n et des espaces vectoriel de dimension n fixée.

La matrice identité de taille n La correspondance matrices-applications linéaires va nous permettre d'aller plus loin dans la compréhension du produit de matrices. *Exercice.* L'application identité Id_E d'un espace E, qui à $\overrightarrow{v}$ associe $\overrightarrow{v}$ est-elle linéaire ? Quelle matrice la code ? Parmi les matrices carrées de taille n existe une matrice, notée I_n, qui est un élément neutre pour le produit : $M.I_n = I_n.M = M$ pour toute M. Qui est I_n ? I_n, élément neutre du produit, joue le rôle du nombre 1.

L'*inverse* d'une matrice Supposons qu'une application linéaire f de E dans E', codée par une matrice F, admet une réciproque :

$$E \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E'.$$

Alors on peut montrer que f^{-1} est linéaire. Notons F' la matrice qui la code. *Exercice.* Quelles applications codent, et que valent, $F.F'$ et $F'.F$? On en tire la définition suivante.

Définition Certaines matrices *carrées* M non nulles (la plupart) admettent une matrice, notée M^{-1}, telle que $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I_n$. Cette matrice est appelée l'*inverse* de M. Elle existe exactement quand l'application linéaire f codée par M admet une réciproque, et code cette réciproque.

Note Pour continuer le parallèle avec les nombres, comme $\frac{1}{2}$ est dit l'inverse de 2 car $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, M^{-1} est dit l'inverse de M car $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I_n$. Cependant, on ne parle jamais de « diviser » par une matrice. En effet, si le sens de « $\frac{3}{2}$ » est clair : « 3 divisé par 2 », celui de « $\frac{M'}{M}$ » ne l'est pas : veut-on dire $M'.M^{-1}$ ou $M^{-1}.M'$? On se contente donc de parler de produit, à droite ou à gauche, par l'inverse M^{-1} de M. L'idée est cependant bien de « diviser » par M. // *Rq.* : l'inverse est toujours inverse des deux côtés : Si $M.M' = I_n$, alors $M'.M = I_n$ aussi, et $M' = M^{-1}$. //

II.4 Point de vue géométrique sur les application linéaires : visualisation de leur action sur le plan

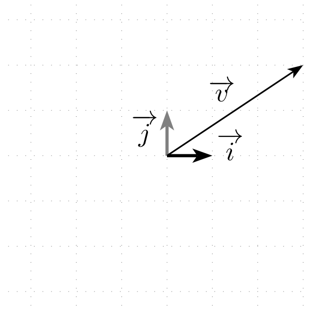
Une bonne manière d'acquérir une compréhension des applications linéaires est de voir leur effet géométrique, on dit leur « action ». Certaines applications vous rappelleront des choses déjà vues en lycée.

On considère dans la suite une application linéaire f du plan $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, représentée par une matrice M. On confond en outre f et sa matrice.

Tout repose sur une **observation fondamentale** : connaître l'image d'une base par une application linéaire f, c'est connaître f.

(Cette observation est reformulée, de façon plus précise, dans la *Moralité* plus bas.)

En effet, considérons par exemple la base usuelle $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan, avec $\vec{i} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{j} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Soit $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un vecteur quelconque du plan et f une application linéaire. Sur le dessin, $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Le quadrillage est celui des coordonnées relatives à $(\vec{i}, \vec{j})$.



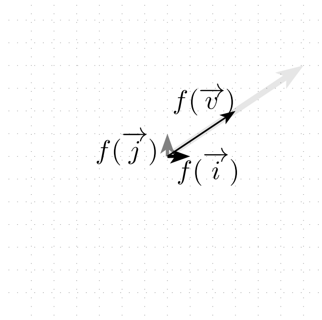
Si on connaît $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$, alors :

$$f(\vec{v}) = f(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}) = x\underbrace{f(\vec{i})}_{\text{connu}} + y\underbrace{f(\vec{j})}_{\text{connu}} \quad \text{est connu.} \tag{1}$$

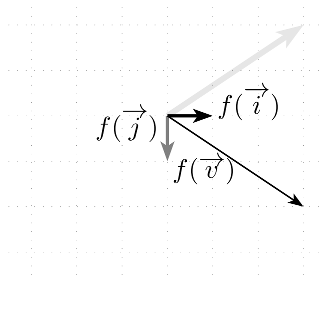
Plus précisément, $f(\vec{v})$ a les mêmes coordonnées que $\vec{v}$, mais dans la base[4] image $f((\vec{i}), f(\vec{j}))$.

Concrétisons cette observation sur des exemples. Les figures présentent l'image du plan par f. Le vecteur $\vec{v}$ est rappelé en gris pale.

– Prenons $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. On peut constater directement que $M.\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{v}$, donc que M est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ *i.e.* la contraction de rapport $\frac{1}{2}$. On peut aussi constater que $M.\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{i}$ et $M.\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{j}$, donc que le quadrillage s'appuyant sur $(M.\vec{i}, M.\vec{j})$ est deux fois plus petit. L'image $f(\vec{v})$ de $\vec{v}$ a, dans ce nouveau quadrillage, les mêmes coordonnées que $\vec{v}$ dans celui de départ. C'est-à-dire que $M.\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

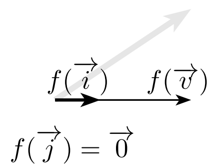


– Prenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $M.\vec{i} = \vec{i}$ et $M.\vec{j} = -\vec{j}$, donc que le quadrillage s'appuyant sur $(M.\vec{i}, M.\vec{j})$ est le quadrillage initial, retourné par rapport à l'axe (Ox). L'image $f(\vec{v})$ de $\vec{v}$ a, dans ce nouveau quadrillage, les mêmes coordonnées que $\vec{v}$ dans celui de départ. C'est-à-dire que $M.\vec{v}$ est le symétrique de $\vec{v}$ par rapport à l'axe (Ox).

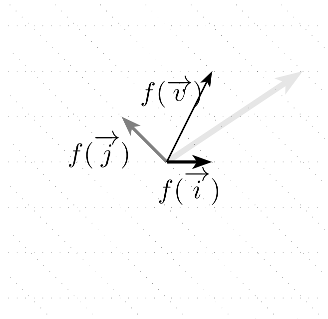


4. Si l'image reste une base, bien entendu.

– Prenons $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, alors $M.\overrightarrow{i} = \overrightarrow{i}$ et $M.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$, donc que le quadrillage s'appuyant sur $(M.\overrightarrow{i}, M.\overrightarrow{j})$ disparaît : il est aplati (orthogonalement) sur l'axe des abscisses et $f(\overrightarrow{v}) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{0}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur l'axe (Ox).



– Prenons enfin $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors $M.\overrightarrow{i} = \overrightarrow{i}$ et $M.\overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, donc que le quadrillage s'appuyant sur $(M.\overrightarrow{i}, M.\overrightarrow{j})$ subit le traitement apparaissant sur la figure. Comme $f(\overrightarrow{v})$ garde les coordonnées $(x, y) = (3, 2)$ dans ce nouveau quadrillage, on peut trouver graphiquement son image.



Comme (1) peut aussi s'écrire avec n'importe quelle base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ à la place de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on aurait pu effectuer les dessins qui précèdent avec n'importe quelle autre base.

Moralité Une application linéaire envoie la base sur n'importe quelle autre famille. Ensuite, elle est déterminée : le quadrillage, c'est-à-dire les coordonnées, suivent le mouvement.

En particulier, si on reconnaît l'action de M sur une base —la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou une autre—, on a donc reconnu M.

Ainsi, dans les exemples 2 et 3, on observe que M a l'effet, sur la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, respectivement des applications linéaires « symétrie orthogonale par arpport à l'axe des abscisses » et « projection orthogonale sur cet axe ». M est donc égale à ces applications.

Remarque pratique importante L'image des vecteurs de la base naturelle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ se lit *sans calcul* sur M. En effet, si $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, alors :

$$\begin{array}{c} \\ M.\overrightarrow{i} = \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et :} \quad \begin{array}{c} \\ M.\overrightarrow{j} = \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{array}$$

donc les colonnes de la matrice M sont les coordonnées de $M.\overrightarrow{i}$ et $M.\overrightarrow{j}$, dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice dont la solution est à connaître Soit r_θ la rotation d'angle θ, du plan, autour de l'origine. Cette application est linéaire : le vérifier. Elle a donc une matrice dans la base naturelle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. En déterminant les images de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ par r_θ, déterminer cette matrice. *Solution.* La matrice de la rotation d'angle θ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, elle est un objet classique et est notée R_θ .

III Résolution de systèmes et inversion de matrices.

III.1 Ce qu'il faut avoir compris

Définition Un *système d'équations* est un ensemble d'équations en une ou plusieurs inconnues, que l'on cherche à résoudre *simultanément. Une solution du système* est la donnée de valeurs de *toutes les inconnues*, vérifiant les équations.

Exemple $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ -3x & & & - & z & = & c \end{array}\right.$ est un système (S) d'équations en les inconnues (x, y, z).

Une solution du système est la donnée de valeurs (x_0, y_0, z_0) de (x, y, z), vérifiant (S). En aucun cas un x_0 seul, ou un couple (x_0, y_0) ne peut être appelé « solution ».

Définition Une équation, ou un système d'équations, en les inconnues $x_1, \ldots, x_n$ est dit linéaire s'il est de la forme $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ avec f linéaire, $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur de coordonnées fixées.

Si vous avez bien en tête ce qu'est une applications linéaire, il vous est clair qu'un système est linéaire si ses inconnues ne subissent que des *multiplications par des constantes* puis des *additions entre elles.*

Exemple/Exercice *à maîtriser.* Le système (S) plus haut est linéaire. Qui sont alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, f ?

Lien avec les matrices Ce point est crucial. Si un système $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ est linéaire, on prend F la matrice codant f, et le système s'écrit donc :

$F.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{u}$ inconnu, qu'on cherche, et $\overrightarrow{v}$ donné.

Exemple/Exercice *à maîtriser.* Exprimer de la sorte le système (S).

Dans la suite, on s'intéresse à un système linéaire et carré, c'est-à-dire ayant autant d'équations —de lignes— que d'inconnues —de colonnes. La matrice qui le représente est donc carrée.

La suite vise à faire comprendre que :

Résoudre un système ou **inverser une matrice**,
c'est (presque toujours) la **même chose** ;
par ailleurs, un ordinateur sait inverser les matrices.

L'avoir compris permet de faire résoudre des systèmes linéaires à un ordinateur, plutôt que de le résoudre vous-même. C'est très utile dès que le système devient un peu lourd.

Par ailleurs, le « presque toujours » fait référence aux systèmes non inversibles, qui demandent un petit travail supplémentaire pour se ramener à une inversion de matrice. Nous ne traitons pas ce cas ici.

Une théorie est inutile, il suffit d'avoir compris le mécanisme sur un exemple.

Exemple/Exercice Vérifier que F est inversible, d'inverse $F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Par un calcul presque immédiat, déterminer alors si (S) a ou n'a pas de solution, et s'il en a, donner cette ou ces solution(s).

Indication : même problème avec des nombres Pour résoudre $2x = 15$, il suffit de diviser par 2 les deux membres de l'équation.

Solution F est inversible, donc (S) : $F.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ est équivalent à : $F^{-1}F.\overrightarrow{u} = F^{-1}.\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{u} = F^{-1}.\overrightarrow{v}$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est solution si et seulement s'il vaut $F^{-1}.\overrightarrow{v}$. Donc (S) a une solution, et une seule, le vecteur $F^{-1}.\overrightarrow{v}$. On peut le calculer et vérifier qu'il est solution.

Exercice/Mise en garde Contrairement au cas des nombres, le côté par lequel on multiplie par F^{-1} a de l'importance. Que signifierait une multiplication des deux membres de l'équation par F^{-1} à *droite* ?

L'essentiel à savoir se résume ainsi.

Propriété Si la matrice M qui code un système linéaire est inversible, alors ce système a une unique solution, qui se calcule comme ci-dessus si on connaît M^{-1}. Si M n'est pas inversible, le système n'a jamais une unique solution :

– soit il n'en a pas,

– soit il en a une infinité

(résultat admis). Ce cours n'en dit pas plus sur ce cas.

III.2 Méthode pratique de résolution des systèmes linéaires

Les ordinateurs résolvent efficacement les systèmes linéaires. Comment font-ils ? Ils appliquent la méthode dite du « pivot de Gauss[5] », dont le principe est extrêmement simple. Voyons-la donc sur un exemple. Ce sera aussi l'occasion d'observer l'affirmation « Résoudre un système ou inverser une matrice, c'est la même chose » fonctionner dans le sens contraire à celui de paragraphe précédent. On va résoudre un système *pour* obtenir l'inverse d'une matrice.

Résolution du système (S) par la méthode du pivot.

On écrit (S) en numérotant les lignes. On a encadré le coefficient -1 en haut à gauche, qui va jouer le rôle de « 1er pivot ».

$$\begin{cases} \boxed{-1}x + 2y + z = a & (\mathrm{L}_1) \\ x + 2y + z = b & (\mathrm{L}_2) \\ -3x - 4z = c & (\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

On ajoute alors aux lignes (L_2) et (L_3) le nombre adéquat de fois la ligne (L_1), pour annuler les coefficients devant la première inconnue, x. On n'oublie pas d'*indiquer les opérations effectuées sur les lignes*, sans quoi le calcul devient illisible —et « irrelisible » en cas d'erreur. Le coefficient de y à la deuxième ligne est encadré : il sera le pivot de l'étape suivante.

$$\begin{cases} -x + 2y + z = a & (\mathrm{L}_1) \\ \boxed{4}y + 2z = b + a & (\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1) \\ -6y - z = c - 3a & (\mathrm{L}_3-3\mathrm{L}_1) \end{cases}$$

À présent, on ajoute aux lignes (L_1) et (L_3) le nombre adéquat de fois la ligne (L_2), pour annuler les coefficients devant la deuxième inconnue, y. Comme le coefficient de x dans (L_2) est maintenant nul, ceci ne détruit pas le travail déjà accompli d'annulation des coefficients de x. Le coefficient de z à la troisième ligne est encadré : il sera le pivot de l'étape suivante et dernière.

$$\begin{cases} -x + \quad = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b & (\mathrm{L}_1-\frac{1}{2}\mathrm{L}_2) \\ 4y + 2z = b + a & (\mathrm{L}_2) \\ \boxed{-1}z = -\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + c & (\mathrm{L}_3+\frac{3}{2}\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

À l'étape ci-dessus, le coefficient de z, à la première ligne, a été annulé. C'est un hasard. À présent, on ajoute aux lignes (L_1) et (L_2) le nombre adéquat de fois la ligne (L_2), pour annuler les coefficients devant la troisième inconnue, z. Ceci ne perturbe pas le travail déjà accompli.

$$\begin{cases} -x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b & (\mathrm{L}_1) \\ 4y = -2a + 4b + 2c & (\mathrm{L}_2+2\mathrm{L}_3) \\ -z = -\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + c & (\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

5. Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855. Mathématicien, astronome et physicien allemand de génie, dont les contributions ont été extrêmement variées et parfois fondatrices, dans certains domaines. En réalité, la méthode du pivot est connue des Chinois depuis au moins le premier siècle de notre ère : elle est exposée, à travers 18 exercices, dans le livre central des mathématiques chinoises , *Les neuf chapitres sur l'art mathématique*. Elle en constitue le chapitre huit, titré *La disposition rectangulaire* — les matrices ne datent donc pas d'hier ... Elle a été réinventée indépendamment par Gauss qui en avait besoin, dans son livre *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (*Théorie du mouvement des corps célestes parcourant des sections coniques autour du soleil*), paru en 1809. Source wikipedia.

Finalement :
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ y = -\frac{1}{2}a + \quad b + \frac{1}{2}c \\ z = \quad \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b - \quad c. \end{cases}$$

Exercice et remarque importante En notant, comme au paragraphe précédent, $\overrightarrow{u} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ le vecteur des inconnues et $\overrightarrow{v} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$, traduire le dernier système en une égalité matricielle. *Solution* : $\overrightarrow{u} = G.\overrightarrow{v}$, avec G la matrice $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Mais alors F et G sont donc réciproques :

$$G.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \overrightarrow{v} = F.\overrightarrow{u},$$

pour n'importe quel $\overrightarrow{u} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Donc G code la réciproque de F, c'est-à-dire que $G = F^{-1}$. Comme annoncé, avoir résolu le système signifie qu'on a inversé la matrice F.

// **Note informative** La méthode du pivot de Gauss tel que présentée ici est programmée de façon beaucoup plus raffinée dans les algorithmes de résolution de systèmes, pour optimiser sa rapidité, sa précision et son universalité (si on tombe sur un pivot nul, que fait-on ?). Cependant, son principe de base n'est rien de plus que l'exemple simple ci-dessus. //

III.3 Un exemple d'apparition d'un système linéaire

Des systèmes linéaires apparaissent dans quantité de situations, sans forcément qu'on s'y attendre. J'en donne un exemple mathématique ici. Par ailleurs le résultat obtenu vous sera utile en Génie chimique par exemple.

« Méthode de Simpson[6] » de calcul approché d'une intégrale On suppose qu'on connaît la valeur d'une fonction f en trois points a, $b > a$ et $c = \frac{b+a}{2}$ le milieu de $[a, b]$: $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ et $f(c) = \gamma$. On veut estimer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il s'agit de l'aire sous le graphe de f entre a et b. Ce graphe passe par les trois points $A = (a, \alpha)$, $B = (b, \beta)$ et $C = (c, \gamma)$, mais sans plus d'information, on est contraint de faire une hypothèse sur sa forme. Si le segment $[a, b]$ est suffisamment petit par rapport à la taille possible des pfluctuations de f, il n'est pas déraisonnable de penser que le graphe sera bien approché par une parabole $\mathcal{P}$ d'axe vertical passant par A, B et C. Une telle parabole est le graphe d'un polynôme P de la forme $P(x) = Ux^2 + Vx + W$. On pourra alors prendre comme valeur approchée :

$$I \simeq \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice (i) En traduisant la contrainte que $\mathcal{P}$ passe par A, B et C, déterminer le polynôme P. *Simplification* : puisque l'intégrale de f est inchangée si on translate la situation horizontalement, on peut supposer que l'intervalle $[a, b]$ est centré en 0, c'est-à-dire que $a = -b$ et donc $c = 0$. On le suppose désormais. Par ailleurs on note $h = \frac{b-a}{2}$.

6. Thomas Simpson, 1710-1761, mathématicien anglais. La méthode d'approximation décrite ici n'est pas un véritable résultat mathématique, mais le calcul d'une approximation plausible. Elle correspond cependant à un véritable théorème de Simpson, qui donne une majoration de l'erreur commise par l'approximation, sous certaines conditions sur les dérivées de f.

(ii) Intégrer P pour obtenir l'approximation de I, qu'on exprimera en utilisant $L = b - a$ la longueur de $[a, b]$.

Solution $I \simeq \frac{\alpha+4\gamma+\beta}{6}L$. Remarques de cohérence : La formule est bien homogène ; si x est en secondes et f en mètres, l'aire I est en m.s. L'expression de I aussi. Par ailleurs, la somme des coefficients au numérateur vaut 6. Il faut s'y attendre. En effet si $f = K$ est constante, l'aire vaut $K.L$, ce que fournit bien la formule $\frac{K+4K+K}{6}L = K.L$.

Question subsidiaire Au **(i)** de l'exercice, on a trouvé une seule solution. On pouvait s'attendre à ce qu'il n'y en ait pas plus d'une. Pourquoi ? *Indication* : si P_1 et P_2 conviennent tous les deux, que vaut le polynôme $P_2 - P_1$ en $x = a$, $x = b$ et $x = c$? Qu'en déduit-on ?

IV Déterminant d'une matrice

Le *déterminant* d'une matrice est une notion fondamentale mais délicate. Ce cours n'aborde que quelques notions à savoir sur lui.

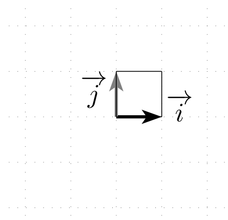
« **Définition** » Le déterminant d'une matrice M carrée de taille n est la surface, pour $n = 2$, ou le volume, pour $n = 3$ (ou pour $n > 3$, avec le sens que vous pouvez imaginer), de l'image du carré ou du cube unité par l'application linéaire représentée par M. Cette surface est comptée négativement si l'application renverse l'orientation. Il est noté $\det M$.

Le déterminant de M mesure donc combien la multiplication par M dilate ou contracte les volumes.

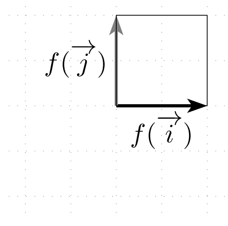
// Vous trouverez rarement le déterminant défini ainsi dans les livres. Cependant, la définition ci-dessus est une vraie définition possible du déterminant. Pour supprimer les guillemets, il suffirait de définir rigoureusement les mots *surface* et *volume*. //

Cette définition se comprend bien une fois vue sur quelques exemples : le déterminant est un concept simple, visuel et géométrique.

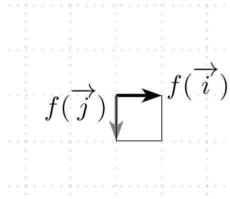
Soit $M = I_2$. Le carré unité est le carré $C = [0, 1] \times [0, 1]$. L'image de C par l'identité est C, de surface 1. Par ailleurs, l'identité préserve l'orientation du plan. Donc $\det I_2 = 1$.



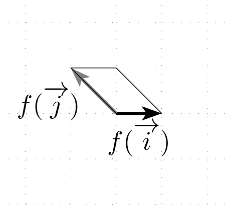
Soit $M = 2I_2$. L'image de C par la multiplication par M est un carré de côté 2, donc de surface 4. Par ailleurs, l'homothétie $2I_2$ préserve l'orientation du plan, donc $\det(2I_2) = 4$.



Soit $M = S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox). L'image de C est son symétrique par rapport à (Ox), qui est encore un carré de côté 1. Mais S renverse l'orientation du plan. Donc $\det S = -1$.



Soit $M = T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'image de C est un parallélogramme de base 1 et de hauteur 1, donc de surface 1. Par ailleurs, T préserve l'orientation du plan, donc $\det T = 1$.



Soit enfin $M = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de la projection orthogonale sur l'axe (Ox). L'image de C est le segment $[0, 1]$ de cet axe, de surface nulle. Donc $\det P = 0$. Le déterminant se définit semblablement en dimension plus grande.

Calcul du déterminant Le déterminant d'une matrice M est une somme (compliquée) de produits de coefficients de M, que les ordinateurs calculent serviablement. Ce cours n'en dit pas plus.

Il peut seulement vous être utile de savoir le calculer pour M de taille 2 ou 3, seuls cas où le calcul a figure humaine. En taille 2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

En taille 3, ceux qui en auront besoin à l'avenir apprendront par exemple la « règle de Sarrus [7] ».

Propriété fondamentale La propriété fondamentale [8] à connaître est :

$$F \text{ est inversible si et seulement si } \det(F) \neq 0.$$

/// **Remarque** Vu la définition du déterminant, cette propriété n'est pas surprenante, qualitativement. Si $\det F = 0$, la multiplication par F « écrase » les volumes à zéro, comme plus haut la projection orthogonale P. Elle envoie plusieurs points sur un même point, et donc ne peut avoir d'application réciproque. La matrice F ne peut donc être inversible. Réciproquement, il n'est pas déraisonnable de penser que si $\det F \neq 0$, donc si F n'aplatit pas les volumes, elle n'envoie jamais deux points sur un même point, donc admet une réciproque, donc est inversible. Cette dernière phrase n'est en rien une preuve. ///

Conséquence Le calcul du déterminant ... détermine donc si une matrice est inversible ou pas. Ainsi, si un système (S) d'équations linéaires est codé par une matrice carrée M, et si on sait que $\det M \neq 0$, alors, sans aucun calcul, on sait que (S) a une unique solution.

V Deux notions utiles : produit scalaire, produit vectoriel

V.1 Le produit scalaire

Vous l'utiliserez en dimension 2 et 3, mais il se définit semblablement en toute dimension. Introduisons-le donc ainsi.

7. Pierre-Frédéric Sarrus, 1798-1861, professeur de mathématiques à la faculté de Strasbourg (!) La « règle de Sarrus » est un truc de calcul du déterminant des matrices carrées de taille trois, que vous apprendrez sur le tas si besoin, il n'y a rien à comprendre, juste à pratiquer.

8. Ce n'en est que la moitié ; elle comprend également le fait que : $\det(FG) = (\det F)(\det G)$ (donc, si F est inversible, $\det(F^{-1}) = \frac{1}{\det F}$).

Définition Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colonnes, leur *produit scalaire* est :

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.}$$

Propriétés

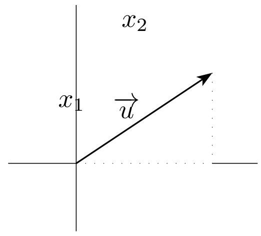
(a) Comme le produit de nombres, il est « distributif par rapport à la combinaison linéaire », et commutatif : $\overrightarrow{u}.(\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2}) = \alpha_1\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.

(b) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$ où géométriquement, $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ est la norme de $\overrightarrow{u}$ *i.e.* sa longueur. Ceci résulte du théorème de Pythagore, voir c-dessous.

(c) Si l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ vaut α, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos\alpha$.

(d) Par conséquent, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > 0$ si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est **aigu** et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$ si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est **obtus**.

Propriété (b) : un dessin à avoir en tête Le **(i)** est simplement le théorème de Pythagore. En dimension 2, si $\overrightarrow{u}$ est de coordonnées (x_1, x_2), le carré de sa longueur $\|\overrightarrow{u}\|^2$ vaut $x_1^2 + x_2^2$. Le même raisonement continue en dimension plus grande.



V.2 Le produit vectoriel

Celui-ci n'est défini **qu'en dimension trois**.

Définition Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs en dimension 3, leur *produit vectoriel*, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, ou parfois $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ en physique, est le vecteur de coordonnées :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.}$$

Truc pour retenir cette définition. Disposer les colonnes de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ côte à côte. Pour la première coordonnée, rayer la première ligne et effectuer le produit en croix sur les autres :

$$\left(\begin{pmatrix} \cancel{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cancel{y_1} \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right).$$

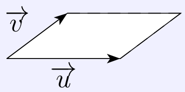
Pour la deuxième, on peut faire de même en rayant la deuxième ligne, mais il faut alors mettre un signe moins au résultat obtenu. Une autre façon de faire est de faire « tourner » les coordonnées, c'est-à-dire de faire comme si les coordonnées des vecteurs se poursuivaient en se répétant. Pour la troisième coordonnée, cela revient au même qu'au début. Cette technique fait apparaître la logique du calcul.

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \cancel{x_2} \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \cancel{y_2} \\ y_3 \\ y_1 \end{pmatrix}\right), \qquad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cancel{x_3} \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cancel{y_3} \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \text{c.à.d. comme au début : } \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cancel{x_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cancel{y_3} \end{pmatrix}\right).$$

Propriétés

(a) À moitié comme le produit de nombres : $\overrightarrow{u} \wedge (\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2}) = \alpha_1 \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_2}$ mais : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$. Le produit vectoriel est **anticommutatif**.

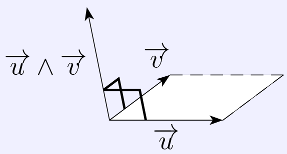
(b) La *norme* $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ est l'*aire* du parallélogramme s'appuyant sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:



c'est-à-dire que $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.|\sin\alpha|$, avec α l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. Par conséquent, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*

(c) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal au plan $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ce qui donne sa *direction.*

(d) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est tel que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base *directe.* Ceci donne le *sens* de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et donc finit de le caractériser.



Utilisations du produit vectoriel Électromagnétisme : force de Laplace, force de Lorentz ; mécanique : moment cinétique d'une force, force de Coriolis.

VI Diagonalisation d'une matrice codant une application linéaire

Nous quittons les rappels. *On s'intéresse désormais aux applications linéaires f d'un certain espace E dans lui-même.* En outre, pour exposer la nouvelle notion sans être parasité par des problèmes techniques, on considère que la dimension $\dim E$ de E est 2. Tout ce qui suit vaut en n'importe quelle dimension n, mais devient techniquement plus compliqué si $n > 2$.

VI.1 Matrice codant une application linéaire *dans différentes bases*

On a vu plus haut que les coordonnées d'un vecteur dépendent de la *base dans laquelle on calcule ces coordonnées.* Il en va de même pour la matrice codant une application linéaire f de E dans E.

Rappel de la remarque pratique de la page 11 Si $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans une certaine base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors les colonnes de la matrice F, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, sont l'image de

$f(\overrightarrow{i})$ de $\overrightarrow{i}$ et l'image $f(\overrightarrow{j})$ de $\overrightarrow{j}$, exprimées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Vous souvenez-vous ? Donc ici, $f(\overrightarrow{i}) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, c'est-à-dire $f(\overrightarrow{i}) = a\overrightarrow{i} + c\overrightarrow{j}$, et semblablement $f(\overrightarrow{j}) = b\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$.

Cependant, on aurait pu choisir une autre base pour construire la matrice codant f. On aurait obtenu une autre matrice. Jusqu'ici, le problème n'apparaissait pas, car la base était toujours sous-entendue, c'était la base correspondant aux coordonnées naturelles des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ ou de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Premier exemple d'expression d'une application dans deux bases différentes. Considérons s la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$, et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la base $(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ (faire le dessin !). Alors $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} = 1.\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire que $s(\overrightarrow{u})$ est de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ *dans la base* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Donc la première colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(s)$ de s dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Semblablement, $s(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{u} = 0.\overrightarrow{u} + (-1).\overrightarrow{v}$, donc la deuxième colonne est $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Conclusion :

$$\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Récapitulons dans une définition.

Définition La matrice d'une application linéaire f dans une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est la matrice dont les colonnes donnent les coordonnées de $f(\overrightarrow{u})$ et $f(\overrightarrow{v})$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:

$$\text{si } \begin{cases} f(\overrightarrow{u}) = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \\ f(\overrightarrow{v}) = c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v} \end{cases}, \quad \text{alors : } \mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Exercice. Faire le même travail avec la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$. *Solution.* Comme $s(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$ et $s(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$,

$$\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Commentaire. Si je vous avais donné $\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(s)$, vous auriez mis un peu de temps à reconnaître s. En revanche, si je vous avais donné $\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(s)$, reconnaître s est plus facile : on voit que s laisse fixe tous les points de la droite dirigée par $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire d'équation $y = x$, et « renverse » la droite dirigée par $\overrightarrow{v}$, qui est orthogonale à la première. Il s'agit donc de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$. Enfin, si je vous avais donné la matrice de s dans une base biscornue, vous auriez bien eu du mal à reconnaître s.

On voit sur cet exemple que, si f est une application linéaire donnée, l'effet de f sur le plan sera facile à comprendre en regardant la matrice de f dans certaines bases bien choisies, ou plus difficile à comprendre, voire totalement illisible, dans d'autres bases. Choisir une bonne base pour exprimer f est donc un art important ; il est également délicat.

VI.2 Applications diagonales et diagonalisables

Un cas particulier où l'action de f sur le plan E est facile à comprendre est le cas où sa matrice F dans la base naturelle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est *diagonale.*

Définition La *diagonale* d'une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^n$ est la ligne de coefficients $(m_{i,i})_{i=1}^n$ qui va d'en haut à gauche à en bas à droite. Une matrice est dite diagonale si tous ses coefficents non diagonaux sont nuls.

Une matrice n'a qu'une « diagonale », c'est ainsi. La matrice identité et la matrice nulle sont les premiers exemples de matrices diagonales.

Ainsi, si $\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(f) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$, f dilate ou contracte la direction des x l'un facteur λ_1, et celle des y d'un facteur λ_2. La symétrie orthogonale s' par rapport à l'axe des x, ou la projection orthogonale p sur l'axe des x, sont d'autres exemples d'application diagonales. *Exercice.* Que valent λ_1 et λ_2 dans ces cas ?

Comme la base naturelle $(\vec{i}, \vec{j})$ n'a pas de raison de jouer un rôle particulier par rapport aux autres bases, la définition vraiment importante est la suivante.

Définition On appelle *diagonalisable* une application f dont la matrice dans une certaine base $(\vec{u}, \vec{v})$ est diagonale.

Introduisons par ailleurs du vocabulaire désignant quelques notions importantes.

Définition Si f est une application linéaire et que $\vec{v}$ est un vecteur *non nul* tel que : $f(\vec{v})$ est colinéaire (autrement dit proportionnel) à $\vec{v}$, c'est-à-dire $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ pour un certain scalaire λ, $\vec{v}$ est appelé un **vecteur propre** de f. Le scalaire λ est appelé une **valeur propre** de f (associée au vecteur propre $\vec{v}$).

Conséquence Une autre façon de dire que f est diagonalisable est donc de dire qu'il existe une base $(\vec{u}, \vec{v})$ formée de vecteurs propres de f. En effet, dire que $\mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(f) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ est diagonale, c'est simplement dire que $f(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = \lambda_2\vec{v}$.

Exemple En VI.1 plus haut, l'application s n'est pas diagonale, car $\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(s)$ n'est pas diagonale, mais est diagonalisable, car $\mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(s)$ est diagonale, avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Remarque Une application diagonale est bien sûr diagonalisable, puisqu'il existe une base où sa matrice est diagonale : simplement la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Les application diagonalisables sont particulièrement simples. Pour d'autres raisons encore, que je n'explique pas ici, elles revêtent une importance particulière. Il peut donc être utile de les détecter, et de trouver une base où leur matrice est diagonale, ce qu'on appelle alors *diagonaliser* l'application. En outre, être diagonalisable est un phénomène courant pour les applications linéaires, en un sens que je ne donne pas ici. On n'est donc pas en train d'étudier des matrices d'un type rare.

Une propriété. Si une application linéaire f est diagonalisable, la base $(\vec{u}, \vec{v})$ dans laquelle sa matrice $\mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(f)$ est diagonale est remarquable, car elle est *unique* à avoir cette propriété —du moins avec les deux nuances ci-dessous.

– bien sûr, si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base qui convient, alors toute base de vecteurs proportionnels $(\alpha\vec{u}, \beta\vec{v})$, pour n'importe quel $\alpha \neq 0$ et quel $\beta \neq 0$, convient aussi. *Exercice :* vérifiez-le !

– si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors n'importe quelle base convient. *Exercice :* montrez-le ! *Indication :* géométriquement, quel type d'application est f ? (*Réponse :* une homothétie, une dilatation autrement dit. Que sont alors $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$, pour n'importe quels $\vec{u}$ et $\vec{v}$?)

Si elle existe, une base où $\mathrm{Mat}(f)$ est diagonale est donc naturelle à rechercher. Par exemple, si f est issue d'un problème physique, ses vecteurs propres et valeurs propres ont alors un sens physique. Pour diagonaliser $\mathrm{Mat}(f)$, voir la recette ci-dessous.

Exercice. Donner une raison *géométrique*, non calculatoire, prouvant qu'une rotation f (d'angle non nul et non égal à π) n'est pas diagonalisable. *Solution.* L'image de n'importe quel vecteur non nul a tourné par rapport à ce vecteur, donc ne lui est pas colinéaire. Donc *aucun vecteur* ne peut être un vecteur propre de f. *A fortiori*, f ne peut être diagonalisable.

On se donne f de matrice $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base naturelle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on se demande si f est diagonalisable.

L'introduction de ce polynôme peut paraître étrange ; il est en fait naturel, mais ce n'est pas immédiatement visible. Dans notre cas de dimension 2, $P_f(x) = (a-x)(d-x) - bc$.

Conséquence dans notre dimension deux. Si P_f a deux racines réelles, alors f a deux valeurs propres, donc deux vecteurs propres (non colinéaires) : f est diagonalisable. Si P_f n'a pas de racine réelle, f n'a pas de valeur propre, donc n'est pas diagonalisable. Si enfin P_f a une seule racine réelle λ, f peut être diagonalisable, avec deux fois la même valeur λ sur la diagonale, ou pas, cela dépend et il faut réfléchir (un peu).

Détermination des vecteurs propres. Si f est diagonalisable, il reste à trouver ses vecteurs propres $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Comme on connaît λ_1 et λ_2, cela revient à résoudre les deux équations :

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda_1 \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad f(\overrightarrow{v}) = \lambda_2 \overrightarrow{v}. \tag{1}$$

On cherche $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire qu'on cherche leurs coordonnées, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$. Les équations (1), codées matriciellement, deviennent un système d'équations sur $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, qu'on résout. On sait que ces systèmes ont des solutions non nulles, car on sait, par la propriété, que λ_1 et λ_2 sont bien valeurs propres de f. Ainsi on trouve un $\overrightarrow{u}$ et un $\overrightarrow{v}$ qui conviennent, et finalement, $\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. *Note* : λ_1 et λ_2 n'ont pas d'ordre privilégié, on les numérote comme on veut.

Recette — Déterminer si une application f est diagonalisable et, si c'est le cas, la diagonaliser.

// **Remarque culturelle après l'exercice** En dimension deux, hormis quelques cas exceptionnels, les applications linéaires sont de deux grands types :

– celles qui sont diagonalisables,

– celles qui ressemblent à des rotations.

En toute dimension, une affirmation semblable, mais techniquement un peu plus élaborée, reste vraie. //

// **Remarque.** J'avais affirmé plus haut qu'il est « courant » qu'une application linéaire soit diagonalisable. On le voit ici, pour E de dimension deux. En effet, leur polynôme caractéristique P_f est de degré deux, le graphe est donc une parabole (de concavité tournée vers le haut). On a alors « une chance sur deux » : soit la parabole est toute entière au-dessus de l'axe des abscisses. Alors P_f n'a pas de racine, c'est-à-dire que f n'a pas de valeur propre. Donc f n'est pas diagonalisable. Soit la parabole coupe l'axe des abscisses. Alors P_f a deux racines, c'est-à-dire que f a deux valeurs propres. Donc f est diagonalisable. (Le cas où la parabole est tangente à l'axe des abscisses est exceptionnel, « infiniment peu probable ».) Ainsi en dimension deux, une application linéaire prise au hasard a « une chance sur deux » d'être diagonalisable. //

VI.3 Changement de base pour la matrice d'une application linéaire

Soit f une transformation linéaire du plan $\mathbb{R}^2$.

Notation On note, ici, $\boldsymbol{F}_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})} = \mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(f)$ la matrice de f dans une certaine base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\boldsymbol{F}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(f)$ sa matrice dans une autre base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Il existe un **lien** entre $F_{(\vec{i},\vec{j})}$ et $F_{(\vec{u},\vec{v})}$. Nous allons montrer lequel, et voir un de ses intérêts, en nous basant sur un exemple.

Prenons f la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et inclinée d'un angle θ par rapport à l'axe des x (faire un dessin). On prend $(\vec{i},\vec{j})$ la base naturelle du plan $\mathbb{R}^2$ et $(\vec{u},\vec{v})$ la base où $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ (dessin). Que valent $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$?

Exercice. Déterminer $F_{(\vec{u},\vec{v})}$. *Solution.* $F_{(\vec{u},\vec{v})} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. En revanche, trouver $F_{(\vec{i},\vec{j})}$ n'est pas si facile (essayez !). En comprenant le *lien* entre $F_{(\vec{i},\vec{j})}$ et $F_{(\vec{u},\vec{v})}$, et comme on connaît $F_{(\vec{u},\vec{v})}$, on va déterminer $F_{(\vec{i},\vec{j})}$.

Étape 1 : construction d'une application g faisant subir à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ la même chose que ce que f fait subir à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour cela, on introduit déjà la transformation p suivante : p est linéaire et envoie $\vec{i}$ sur $\vec{u}$ et $\vec{j}$ sur $\vec{v}$. *Exercice :* il n'y en a pas besoin ici, mais au passage, reconnaissez-vous p ? Regardez bien ce qui se passe sur un dessin. Solution en note [9]. Notons alors que p a une réciproque, p^{-1}, définie par le fait que p^{-1} est linéaire et envoie $\vec{u}$ sur $\vec{i}$ et $\vec{v}$ sur $\vec{j}$. On construit alors la transformation $g = p^{-1} \circ f \circ p$ suivante [10] :

$$g \ : \ \begin{array}{ccccccc} & p & & f & & p^{-1} & \\ \vec{i} & \mapsto & \vec{u} & \mapsto & f(\vec{u}) \ [= \vec{u} \text{ ici}] & \mapsto & p^{-1}(f(\vec{u})) \ [= p^{-1}(\vec{u}) = \vec{i} \text{ ici}] \\ \vec{j} & \mapsto & \vec{v} & \mapsto & f(\vec{v}) \ [= -\vec{v} \text{ ici}] & \mapsto & p^{-1}(f(\vec{v})) \ [= p^{-1}(-\vec{v}) = -\vec{j} \text{ ici}] \end{array}$$

Passage-clé à comprendre. Vérifions que g fait bien subir à $(\vec{i},\vec{j})$ ce que f fait subir à $(\vec{u},\vec{v})$. Il y a deux façons de le comprendre.

– L'application f conserve $\vec{u}$: $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et renverse $\vec{v}$: $f(\vec{v}) = -\vec{v}$. On voit, par le schéma ci-dessus, que g agit de même sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$: $g(\vec{i}) = \vec{i}$ et $g(\vec{j}) = -\vec{j}$.

– Ce phénomène reste valable même si f n'est pas la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(O\vec{u})$, mais n'importe quelle application linéaire. En effet, g est *construite exprès* pour cela :

- on *amène* $(\vec{i},\vec{j})$ *sur* $(\vec{u},\vec{v})$, par p,
- on *applique* f, faisant donc subir à $(\vec{i},\vec{j})$, qui viennent d'être placés sur $(\vec{u},\vec{v})$, l'effet de f,
- on *remet le résultat à sa place*, par p^{-1}.

Exercice. Pour vraiment comprendre, faites le calcul avec f l'application linéaire de matrice quelconque $\mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(f) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Reprenez le schéma ci-dessus en adaptant les expressions entre crochets « [...ici] ».

Étape 2 : calcul des matrices de tout ce petit monde et conclusion. Déjà, remarquons que la matrice $P = \mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(p)$, de p dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est (*Exercice :* laquelle ?) la matrice donnant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$: $P = \left(\begin{smallmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{smallmatrix}\right)$.

Quelle est la matrice de g dans la base $(\vec{i},\vec{j})$? On la connaît de deux façons :

9. p est bien sûr la rotation d'angle θ.

10. Je ne me suis pas trompé dans l'ordre d'écriture $g = p^{-1} \circ f \circ p$. On applique d'abord p, puis f, puis p^{-1}, ce qui s'écrit bien $g = p^{-1} \circ f \circ p$.

– Comme g fait subir à $(\vec{i}, \vec{j})$ ce que f fait subir à $(\vec{u}, \vec{v})$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(g) = \mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(f) = F_{(\vec{u},\vec{v})}.$$

Si vous avez bien compris ce que c'est que la matrice d'une appication linéaire dans une certaine base, cela doit vous être clair. Sinon, revenez à la définition d'une telle matrice.

– Comme $g = p^{-1} \circ f \circ p$, alors, en notant P la matrice $\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(p)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(g) = P^{-1}.\,\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(f).P = P^{-1}.F_{(\vec{i},\vec{j})}.P.$$

Ainsi, en rassemblant les deux égalités, on obtient le lien cherché entre $F_{(\vec{i},\vec{j})} = \mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(f)$ et $F_{(\vec{u},\vec{v})} = \mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(f)$:

$$F_{(\vec{u},\vec{v})} = P^{-1}.F_{(\vec{i},\vec{j})}.P,$$
où P est la matrice donnant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:
$$P = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}.$$

On appelle P la *matrice de passage* de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ vers la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Cette formule permet de calculer facilement la matrice d'une application dans une certaine base, connaissant sa matrice dans une autre.

Exemple/Exercice. Au début du paragraphe, il n'était pas si simple de calculer $F_{(\vec{i},\vec{j})}$. À présent, vous savez que $F_{(\vec{i},\vec{j})} = P.F_{(\vec{u},\vec{v})}.P^{-1}$ (pourquoi ? regardez la formule encadrée et multipliez chaque membre, à gauche par P et à droite par P^{-1}). *Truc.* Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. *Rappels.* $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ et $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$. Enfin à vous de jouer, calculez $F_{(\vec{i},\vec{j})}$. *Solution.* $F_{(\vec{i},\vec{j})} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$.

Remarque. Le calcul ci-dessus illustre la remarque de la fin du paragraphe VI.1. On reconnaît et comprend bien f en voyant sa matrice $F_{(\vec{u},\vec{v})}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. En revanche, f est méconnaissable, codée dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Lien avec la diagonalisation de matrices. Si vous connaissiez une application f par sa matrice $F = \mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(f)$, que f est diagonalisable, et que vous avez trouvé une base $(\vec{u}, \vec{v})$ telle que $D = \mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(f)$ est diagonale, alors la formule encadrée fournit le lien entre F et D :

$$D = P^{-1}.F.P,$$

où la matrice de passage P est, comme dit l'encadré, la matrice des coordonnées de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

VI.4 Annexe : transposée d'une matrice, matrices symétriques

Soit M une matrice quelconque, à p lignes et q colonnes :

$$M = (a_{i,j})_{i=1}^{p}{}_{j=1}^{q} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Définition On appelle *transposée de* M et on note ${}^tM$ ou M^t ou M^T la matrice à q lignes et p colonnes dont les lignes sont les colonnes de M, et vice versa :

$$ {}^tM = (a_{j,i})_{j=1}^{q}\,{}_{i=1}^{p} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{p,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{p,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \cdots & a_{p,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,q} & a_{2,q} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}. $$

La transposée de M s'obtient donc en « retournant » M par rapport à ce qu'on appellerait sa diagonale, si elle était carrée : $(a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots)$.

Définition Une matrice carrée M est dite symétrique si elle est égale à sa transposée : ${}^tM = M$.

Autrement dit, chaque coefficient non diagonal $a_{i,j}$ est égal à son coefficient symétrique $a_{j,i}$. Les matrices symétriques, qu'on rencontre couramment pour beaucoup de raisons, sont notamment remarquables pour leur propriété suivante.

Propriété (admise) Toute matrice symétrique est diagonalisable, et même diagonalisable dans une base orthonormée.

Algèbre linéaire – Exercices

Espaces vectoriels, familles de vecteurs

Exercice 1 Lesquels des ensembles suivants sont-ils naturellement des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$?

L'ensemble des polynômes. L'ensemble des polynômes de degré plus petit qu'un degré donné. L'ensemble des polynômes de degré plus grand qu'un degré donné. L'ensemble des polynômes de degré donné. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$. Les différentielles en deux variables U et V. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + y = 0$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + y = 1$. L'ensemble des colonnes de 27 chiffres indiquant le nombre de mètres carrés d'habitations construits une année donnée dans chacun des pays membres de l'UE. L'ensemble des matrices à coefficients réels, à p lignes et q colonnes. L'ensemble des matrices à coefficients complexes, à p lignes et q colonnes. L'ensemble des matrices à coefficients réels.

Exercice 2 Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. On suppose que chacune des familles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ sont libres. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est-elle libre ? (oui, toujours ; non, jamais ; ça dépend ... ? Justifier.)

Exercice 3 Soit $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ une famille de vecteurs, disons à dix coordonnées. On suppose que $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ est liée. Peut-on lui ajouter un vecteur $\overrightarrow{u}_4$ bien choisi pour que la famille $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4)$ soit libre ? Justifier précisément, en trois lignes.

Exercice 4 Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une famille de trois vecteurs indépendants de l'espace. Les familles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ sont-elle libres ? (oui, toujours ; non, jamais ; ça dépend ... ? Justifier.)

Exercice 5 La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donnée par : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, est-elle libre ?

Produits scalaire et vectoriel

Exercice 6 Soit dans l'espace les champs de vecteurs $\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du champ $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. *Sans calcul*, trouver la valeur de $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{u}$ (faire un dessin).

Exercice 7 Calculer le moment cinétique $\overrightarrow{L}$, par rapport au centre O de la terre, d'une personne de 70 kg, assise dans la salle (supposée située à la latitude 45°). Rayon terrestre : $\sim$ 6400 km. *Rappel* : le moment cinétique d'un objet ponctuel M par rapport à un certain point O est défini comme $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}$, avec $\overrightarrow{p}$ la quantité de mouvement de l'objet M : $\overrightarrow{p} = m.\overrightarrow{v}$, m masse de M, $\overrightarrow{v}$ vitesse de M.

Applications linéaires, systèmes linéaires

Exercice 8 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a) L'application qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

b) L'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, où $\overrightarrow{B}$ est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^3$ et l'application g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{B}$.

c) L'application f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée par $f(\overrightarrow{v}) = A.\overrightarrow{v}$, où A est une matrice à 4 lignes et 4 colonnes.

Exercice 9 Les systèmes (S) et (S') suivants sont-ils linéaires en leurs inconnues x et y ? Pourquoi ? Résoudre celui (ceux) qui l'est (le sont).

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 3(x-2y+\sqrt{2}) & = & -5y+\pi \\ x\ln\frac{T}{T_0} & = & \ln\frac{T}{T_0}+2x \end{array} \right. , \qquad (S') \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 3x(2e^U+y) & = & 2 \\ x\ln\frac{T}{T_0} & = & \ln\frac{T}{T_1} \end{array} \right.$$

Matrices, systèmes linéaires

Exercice 10 Soit les matrices et vecteur suivants.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $C = A.B$ et $C.\overrightarrow{v}$, puis $B.\overrightarrow{v}$, $A.(B.\overrightarrow{v})$ et $D = B.A$. Les résultats sont-ils cohérents ?

b) Calculer $M.\overrightarrow{w}$.

Exercice 11 Quelles transformations géométriques de $\mathbb{R}^2$ représentent les matrices suivantes ? *Faire des dessins.* Si la transformation porte un nom, le donner en la reconnaissant à son action sur la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou sur une autre base. Dire quelles matrices sont inversibles et donner leur inverse. Ensuite et *sans calcul*, donner leur déterminant. Par ailleurs, quelle est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = 0$? Et par rapport à la droite d'équation $y = -x$?

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 La rotation r_θ du plan $\mathbb{R}^2$, de centre 0 et d'angle θ, est-elle linéaire (on ne demande pas de justification précise) ? Si oui, donner sa matrice R_θ, en observant l'action de r_θ sur les vecteurs de base. *Sans calcul*, donner une expression de R_θ^2. Encore sans calcul, dire si la matrice R_θ est inversible et si oui donner son inverse. Toujours sans calcul, donner son déterminant.

Exercice 13 Soit α un nombre fixé. Combien les systèmes suivants ont-ils de solutions ? Les résoudre.

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3u - v = \alpha \\ -4u + 2v = 1 \end{array} \right. , \qquad (S') \quad \left\{ \begin{array}{l} 2u - 4v = \alpha \\ -3u + 6v = 1 \end{array} \right. .$$

Exercice 14 Soit M la matrice donnant le taux d'activité de chaque pays de l'Union Européenne, en janvier 2010 dans sa première colonne, en février 2010 dans sa deuxième. Les grandeurs suivantes peuvent s'obtenir en multipliant M par des matrices bien choisies. Pourquoi ? Par quelles matrices, et de quel côté ?

– La moyenne des 27 taux d'activité des pays de l'Union, en janvier et en février 2010 ?

– Le taux d'activité de l'Union, en janvier et en février 2010 ?

– Le vecteur donnant la variation du taux d'activité de chaque pays de l'Union, entre janvier et février 2010 ?

Rappel : le taux d'activité d'une population est le rapport A/P, où A est le nombre de personnes actives, c'est-à-dire exerçant un travail ou en cherchant un, et P est la population totale de plus de 15 ans. On suppose connue et constante sur la période observée, la population de chacun des pays.

Exercice 15 Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & +6 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$. Que vaut $M.N$? Par conséquent, qui est N ? Que vaut $N.M$? Résoudre : $\begin{cases} -x & +3y & -2z & = 2 \\ -x & +y & -z & = -1 \\ 5x & -6y & +6z & = 1 \end{cases}$.

Exercice 16 Soit α, a, b et c des nombres fixés. Résoudre les systèmes.

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} 3u - v + w = \alpha \\ -4u + 2v + 2w = 1 \end{cases}, \qquad (\mathrm{S}') \begin{cases} 2u - 4v = \alpha \\ -3u + 6v \ + \ = 1 \end{cases}, \qquad (\mathrm{S}'') \begin{cases} -u & +2v & +w = a \\ u & +2v & +w = b \\ -3u & & -w = c \end{cases}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner l'inverse et vérifier en effectuant le produit.

Exercice 17 Reconnaître :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisation de matrices

Exercice 18 Si cela est possible, diagonaliser les matrices F suivantes, c'est-à-dire :

– Trouver leur(s) valeur(s) propre(s) et donner un vecteur propre associé à chacune d'entre elles,

– Écrire la matrice P envoyant les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ de la base naturelle sur les vecteurs propres précédemment donnés, puis calculer la matrice inverse P^{-1} de P,

– Vérifier la formule donnée en cours liant P et F.

Si la matrice F n'est pas diagonalisable, dire pourquoi.

a) $F = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

d) $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

e) $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

f) en option. $F = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Reconnaître F, si possible.

Exercice 19 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^5. Pour cela, diagonaliser A et donner les matrices P et P^{-1} comme dans l'exercice précédent. Par ailleurs, si possible, trouver une «matrice racine carrée» de A, c'est-à-dire une matrice B telle que $B^2 = A$.

Quelques réponses

6. $\vec{w} = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \\ yz \end{pmatrix}$.

7. Un vecteur $\vec{J}$ parallèle à l'axe de rotation de la terre et de norme $\|\vec{J}\| \simeq 1,04.10^5\,\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$.

10. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 34 & -13 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 115 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -10 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 115 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -14 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

14. À gauche par $(\frac{1}{27} \ \dots \ \frac{1}{27})$. À gauche par $(\frac{P_1}{P} \ \dots \ \frac{P_{27}}{P})$, où P_i est est population de plus de 15 ans du i$^{\text{ème}}$ pays de l'Union et $P = \sum_{i=1}^{27} P_i$ la population de plus de 15 ans de l'Union. À droite par $(-1, 1)$.

15. $(x, y, z) = (5, -1, -5)$

16. (S) : Les solutions sont les triplets (u, v, w) tels que w est libre et $\begin{cases} u = \alpha + \frac{1}{2} - 2w \\ v = 2\alpha + \frac{3}{2} - 5w. \end{cases}$
(S') : Si $\alpha \neq -\frac{2}{3}$, (S') n'a pas de solution. Si $\alpha = -\frac{2}{3}$, (S') a une infinité de soutions : tous les couples (u, v) tels que v est libre et $u = 2v - \frac{1}{3}$. (S'') : L'unique solution est le triplet $(u, v, w) = (\frac{b-a}{2}, b + \frac{c-a}{2}, \frac{3a-3b}{2} - c)$. On en déduit que la matrice donnée est inversible, d'inverse $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

18. a) On remarque *tout de suite* que F est diagonalisable, puisque *symétrique*. Le calcul du polynôme caractéristique le confirme et donne ses valeurs propres, qui sont 4 et -1. Les vecteurs propres associés sont, à proportionnalité près, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, associé à la valeur propre 4, et le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, associé à la valeur propre -1. *Note :* ils sont orthogonaux. Est-ce surprenant ? Les matrices P et P^{-1} sont donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/3 & -1/5 \end{pmatrix}$. On vérifie enfin que : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.
b) La matrice F est diagonalisable. Ses valeurs propres sont 4 et 0, des vecteurs propres associés sont, à proportionnalité près, respectivement le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$. On vérifie que : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.
c) Le polynôme caractéristique de F est $P_F(x) = x^2 + 1$, qui n'a pas de racine réelle. La matrice F n'a donc pas de valeur propre, elle n'est pas diagonalisable.
d) Le polynôme caractéristique de F est $P_F(x) = (x-2)^2$, qui n'a qu'une seule racine : 2. La matrice F n'a donc qu'une seule valeur propre, 2. Si elle était diagonalisable, elle s'écrirait, dans une certaine base : $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors F serait l'homothétie de rapport deux. Elle s'écrirait alors ainsi dans *n'importe quelle base*. D'après la forme de F dans l'énoncé, ce n'est pas le cas. Donc F n'est pas diagonalisable.
e) Idem.
f) F est la projection orthogonale sur la droite d'équation $y = x$.

19. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$. On en déduit : $A^5 = \begin{pmatrix} 94 & 6 \\ -93 & -61 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, on peut prendre, par exemple, $B = \begin{pmatrix} -2+3\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ 3-3\sqrt{2} & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.