

---

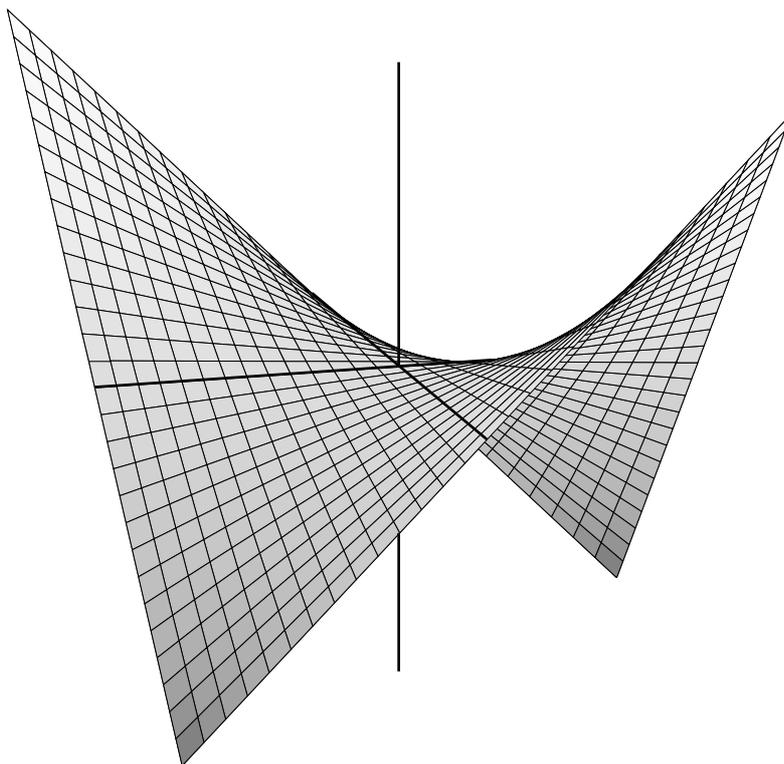
# Algèbre linéaire et bilinéaire I

2MA221

Yves Coudène, 1 septembre 2020

Licence de mathématiques, Sorbonne Université

Version 2



2020 - 2021

---



## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Rappels d'algèbre linéaire</b>	<b>7</b>
1 Généralités sur les matrices . . . . .	7
1.1 Définition d'une matrice . . . . .	7
1.2 Rang d'une matrice . . . . .	8
2 Matrices échelonnées . . . . .	9
2.1 Définition d'une matrice échelonnée . . . . .	9
2.2 Propriétés . . . . .	10
3 Algorithme du pivot de Gauss . . . . .	11
3.1 Mise sous forme échelonnée . . . . .	11
3.2 Résolution de systèmes linéaires . . . . .	13
3.3 Interprétation matricielle . . . . .	14
3.4 Applications . . . . .	16
<b>2 Formes quadratiques</b>	<b>21</b>
1 Formes linéaires . . . . .	21
1.1 Définition d'une forme linéaire . . . . .	21
1.2 Noyau d'une forme linéaire . . . . .	22
1.3 Base duale . . . . .	23
1.4 Le cas de $\mathbf{R}^n$ . . . . .	24
2 Formes bilinéaires . . . . .	26
2.1 Définition d'une forme bilinéaire . . . . .	26
2.2 Représentation matricielle . . . . .	27
2.3 Changement de base . . . . .	28
2.4 Rang et noyau . . . . .	29
3 Formes quadratiques . . . . .	30
3.1 Définition d'une forme quadratique . . . . .	30
3.2 Signature . . . . .	32
3.3 Réduction des formes quadratiques . . . . .	33
3.4 Base orthogonale . . . . .	36
3.5 Interprétation matricielle . . . . .	38
3.6 Étude de la signature . . . . .	38
4 Coniques et quadriques affines . . . . .	40
4.1 Coniques . . . . .	40
4.2 Quadriques . . . . .	42
5 Compléments . . . . .	46
5.1 Forme quadratique et déterminant . . . . .	46
5.2 Classification des formes quadratiques . . . . .	47

<b>3</b>	<b>Espaces euclidiens</b>	<b>49</b>
1	Produit scalaire . . . . .	49
1.1	Définition d'un produit scalaire . . . . .	49
1.2	Norme euclidienne . . . . .	50
1.3	Aire, longueur et angle . . . . .	51
1.4	Espace euclidien orienté . . . . .	54
2	Orthogonalité . . . . .	56
2.1	Projection orthogonale . . . . .	56
2.2	Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . . .	59
3	Isométries . . . . .	61
3.1	Définition d'une isométrie . . . . .	61
3.2	Groupe orthogonal . . . . .	62
3.3	Isométries du plan euclidien . . . . .	63
4	Compléments . . . . .	65
4.1	Isométries affines . . . . .	65
4.2	Déterminant de Gram . . . . .	66
4.3	Distance à un sous-espace . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Réduction des applications linéaires</b>	<b>69</b>
1	Déterminant . . . . .	69
1.1	Définition du déterminant . . . . .	69
1.2	Calculs de déterminants . . . . .	70
1.3	Propriétés des déterminants . . . . .	71
1.4	Déterminant d'une application linéaire . . . . .	73
2	Diagonalisation . . . . .	74
2.1	Somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	74
2.2	Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	77
2.3	Diagonalisation . . . . .	80
2.4	Interprétation matricielle . . . . .	81
2.5	Cas des valeurs propres distinctes . . . . .	83
3	Transformations autoadjointes . . . . .	84
3.1	Adjoint d'une application linéaire . . . . .	84
3.2	Diagonalisation des applications autoadjointes . . . . .	86
3.3	Interprétation matricielle . . . . .	87
3.4	Réduction simultanée . . . . .	90
4	Compléments . . . . .	92
4.1	Comparaison des normes euclidiennes . . . . .	92
4.2	Caractéristiques géométriques des coniques . . . . .	93
4.3	Théorème de d'Alembert-Gauss . . . . .	94
4.4	Espaces préhilbertiens . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>99</b>
1	Erreurs courantes . . . . .	99
2	Formulaire . . . . .	101
3	Méthodes . . . . .	106
	<b>Notations</b>	<b>107</b>
	<b>Index</b>	<b>109</b>

## Introduction

*Mais malheur à l'auteur qui veut toujours instruire!  
Le secret d'ennuyer est celui de tout dire.*

Voltaire (1694–1778)

Ces notes accompagnent le cours 2MA221 *Algèbre linéaire et bilinéaire I* donné au premier semestre des années 2020 et 2021 à Sorbonne Université. Le site internet se trouve à l'adresse

<https://www.lpsm.paris/pageperso/coudene/2MA221-algebre-lineaire-bilineaire-I.html>

Ce cours d'algèbre linéaire suppose connu les notions d'espace vectoriel, de base, d'application linéaire et de matrice ainsi qu'une familiarité avec les notions de déterminants et de valeurs propres. Il a pour objet l'étude des formes quadratiques, des espaces euclidiens et la diagonalisation des applications linéaires. Trois points de vue sont adoptés dans ce texte.

- Les algorithmes permettent un calcul effectif des objets étudiés,
- le point de vue géométrique permet de les visualiser,
- l'algèbre en donne une représentation abstraite simplifiant leur étude.

Le premier chapitre contient des rappels d'algèbre linéaire. On introduit la notion de matrice échelonnée et on explique comment échelonner une matrice quelconque par l'algorithme du pivot de Gauss. Ce procédé permet entre autre de calculer le noyau et le rang des matrices et de résoudre les systèmes linéaire associés. Le point clef du chapitre est bien sûr l'algorithme du pivot de Gauss.

Le second chapitre porte sur les formes quadratiques. On montre que toute forme quadratique peut s'écrire sous forme de somme de carrés de formes linéaires, grâce à un algorithme de réduction là encore dû à Carl Friedrich Gauss (1777-1855). La notion de signature permet de les classer à équivalence près.

Le troisième chapitre est de nature plus géométrique. L'étude des espaces euclidiens est illustrée par quelques résultats de géométrie plane. On fait le lien entre les notions de produit scalaire, d'aire, de longueur et d'angle et on donne une application à l'étude des coniques du plan et des quadriques de l'espace.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des applications linéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie. Après quelques résultats généraux concernant leur diagonalisation, on fait une étude plus détaillée des applications autoadjointes dans le cadre euclidien.

Ce texte couvre l'intégralité du cours 2MA221. Il est complété par des feuilles d'exercices qui permettent une assimilation progressive de son contenu. La liste des méthodes développées dans ce cours est donnée en annexe. Une bonne connaissance de ces méthodes est exigée à l'examen. On ne saurait aussi trop insister sur la nécessité de s'entraîner à calculer tout au long du semestre pour bien réussir cet examen.

## Chapitre 1

# Rappels d'algèbre linéaire

On rappelle dans ce chapitre quelques notions d'algèbre linéaire vues en première année de licence. Le corps de base est celui des nombres réels ou complexes.

Le résultat clef est l'algorithme du pivot de Gauss qui permet de mettre les matrices sous forme échelonnée. Une fois sous forme échelonnée, on calcule facilement le rang de la matrice, son noyau ou encore les solutions des systèmes linéaires associés. C'est également cet algorithme qui permet de passer d'une représentation cartésienne d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$  à une représentation paramétrique et vice-versa.

## 1. Généralités sur les matrices

### 1.1 Définition d'une matrice

Rappelons qu'une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  est une famille de nombres réels ou complexes indexée par deux indices  $i$  et  $j$  compris respectivement entre 1 et  $m$  et entre 1 et  $n$ . Elle possède  $m$  lignes et  $n$  colonnes, on la note

$$A = \{a_{i,j}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$$

et on la représente sous la forme d'un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices de taille  $n \times n$  est noté  $M_n(\mathbf{R})$ . À toute matrice  $A$  de taille  $m \times n$  correspond une application linéaire définie de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^m$  qui associe au vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  le vecteur  $y = (y_1, \dots, y_m)$  donné par les formules

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j, \quad i \text{ allant de } 1 \text{ à } m.$$

On utilise l'expression abrégée  $y = Ax$ . Il est d'usage de représenter  $x$  et  $y$  par des vecteurs colonnes

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

et de représenter les égalités précédentes sous la forme

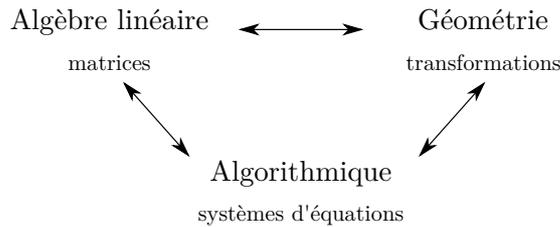
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

À une matrice donnée  $A = \{a_{i,j}\}$  est naturellement associé un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = y_m \end{cases}$$

C'est le système d'équations qui exprime les coordonnées du vecteur  $y$  en fonction de celles de  $x$ .

On voit qu'il y a trois types d'objets qui se correspondent : les matrices, les applications linéaires et les systèmes d'équations linéaires. Chaque objet correspond à un point de vue différent.



- En algèbre linéaire, on additionne et on fait des produits de matrices.
- En géométrie, on compose des transformations.
- En algorithmique, on manipule des systèmes d'équations.

Suivant les objectifs qu'on se fixe, on est amené à adopter l'un ou l'autre de ces points de vue. Il est donc important de savoir passer de l'un à l'autre. Par exemple, il faut être capable de traduire un énoncé d'algèbre linéaire en termes géométriques ou de ramener un problème de géométrie à la résolution d'un système d'équations.

## 1.2 Rang d'une matrice

Rappelons quelques résultats concernant le rang d'une matrice.

**Définition 1** Le noyau d'une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  est constitué des vecteurs  $x \in \mathbf{R}^n$  pour lesquels  $Ax = 0$ .

$$\ker(A) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

L'image de  $A$  est constituée des vecteurs de  $\mathbf{R}^m$  de la forme  $Ax$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ .

$$\text{im}(A) = \{Ax \in \mathbf{R}^m \mid x \in \mathbf{R}^n\}.$$

Le rang de  $A$  est égal à la dimension de l'image de  $A$ .

$$\text{rang}(A) = \dim \text{im}(A).$$

L'image d'une matrice est égale à l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. Le rang est égal à la dimension de cet espace.

Le noyau et l'image d'une matrice sont des espaces vectoriels. Le rang d'une matrice est un entier qui est nul si et seulement si tous les coefficients de la matrice sont nuls.

La proposition suivante montre que la somme du rang d'une matrice et de la dimension de son noyau est égale à la dimension de l'espace sur lequel est définie la matrice.

**Proposition 1 (formule du rang)** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ .

$$\text{rang}(A) + \dim \ker(A) = n.$$

## 2. Matrices échelonnées

### 2.1 Définition d'une matrice échelonnée

Les matrices échelonnées forment une classe de matrices simples à étudier.

**Définition 2** Une matrice est dite échelonnée en lignes si le nombre de zéros consécutifs au début de chaque ligne augmente strictement de lignes en lignes jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.

Les *pivots* sont les premiers termes non nuls de chaque ligne.

#### Exemples

Les matrices suivantes sont échelonnées, les pivots sont en gras :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix}.$$

Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** rappelons qu'une matrice est carrée si elle a le même nombre de lignes que de colonnes :  $m = n$ . Les matrices carrées échelonnées sont triangulaires :  $a_{i,j} = 0$  si  $i > j$ .

**Définition 3** Une matrice échelonnée est échelonnée réduite si :

- ses pivots sont tous égaux à 1,
- dans une colonne contenant un pivot, tous les coefficients sont nuls sauf le pivot.

### Exemple

Les matrices suivantes sont échelonnées réduites :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les matrices suivantes ne sont pas sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Propriétés

Le rang d'une matrice échelonnée est facile à calculer.

**Proposition 2** Le rang d'une matrice échelonnée est égal à son nombre de pivots. Il est aussi égal au nombre de lignes non identiquement nulles.

La dimension du noyau d'une matrice échelonnée est égale au nombre de colonnes ne contenant pas de pivots.

Les systèmes linéaires associés à des matrices échelonnées réduites sont aisés à résoudre.

**Méthode :** résolution des systèmes linéaires échelonnés réduits

Soit  $A$  une matrice échelonnée réduite. On cherche à résoudre le système décrit plus haut : le vecteur  $y$  étant donné, on cherche tous les  $x$  pour lesquels  $Ax = y$ . Les variables  $x_1, \dots, x_n$  situées à l'emplacement niveau des pivots sont appelés *variables principales*.

- On introduit un paramètre pour chaque variable non principale.
- On exprime les variables principales en fonction de ces paramètres.

On obtient alors une équation paramétrique pour l'ensemble des solutions du système.

**Exemple**

Les réels  $y_1, y_2$  étant deux nombres réels donnés, cherchons les solutions  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$  du système

$$\begin{cases} x_1 + & + 3x_3 = y_1 \\ & x_2 + x_3 = y_2 \end{cases}$$

Il est associé à la matrice échelonnée réduite  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Les variables principales sont  $x_1$  et  $x_2$ . Il existe une seule variable non principale,  $x_3$ . On introduit donc un paramètre  $\lambda$  et on pose  $x_3 = \lambda$ .
- On exprime les variables principales  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de ce paramètre.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3x_3 = y_1 - 3\lambda \\ x_2 = y_2 - x_3 = y_2 - \lambda \end{cases}$$

On obtient l'équation paramétrique désirée :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3\lambda \\ x_2 = y_2 - \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

En notation vectorielle,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute valeur de  $y_1$  et  $y_2$ , Le système possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est une droite affine dirigée par le vecteur  $(-3, -1, 1)$  et passant par le point de coordonnées  $(y_1, y_2, 0)$ .

On en déduit le noyau de  $A$  en prenant  $y_1 = 0$  et  $y_2 = 0$  :

$$\ker(A) = \{\lambda(-3, -1, 1) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur de coordonnées  $(-3, -1, 1)$ . La dimension du noyau est égale à 1, elle est bien égale au nombre de colonnes de  $A$  sans pivots : la troisième colonne de  $A$  est la seule sans pivot.

**3. Algorithme du pivot de Gauss****3.1 Mise sous forme échelonnée**

L'algorithme de Gauss (1777-1855) permet de placer une matrice sous forme échelonnée réduite. Il ne modifie pas l'ensemble des solutions du système linéaire associé à la matrice, il permet donc de ramener la résolution d'un système linéaire quelconque à un système échelonné.

**Méthode :** *mise sous forme échelonnée d'une matrice*

On cherche à transformer une matrice de taille  $m \times n$  en une matrice échelonnée. L'algorithme de Gauss opère sur les lignes de la matrice.

– Si le coefficient  $a_{1,1}$  est non nul, on soustrait un multiple de la première ligne à la seconde ligne afin d'annuler  $a_{2,1}$  puis on répète cette opération pour les lignes suivantes.

– S'il existe une ligne dont le premier coefficient est non nul, on la permute avec la première ligne et on est ramené au cas précédent.

Après ces opérations, seul le premier coefficient de la première colonne peut être non nul. On répète le même procédé pour le bloc obtenu en supprimant la première ligne et la première colonne de la matrice, et ainsi de suite jusqu'à traiter toutes les colonnes. La matrice est alors sous forme échelonnée.

**Exemple**

Appliquons l'algorithme précédent à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{4}L_2 \end{array} \quad \text{Forme échelonnée}$$

**Méthode :** *mise sous forme échelonnée réduite d'une matrice*

On cherche à transformer une matrice échelonnée en une matrice échelonnée réduite. Pour cela, on effectue les opérations suivantes sur les lignes de la matrice.

– Pour chaque ligne contenant un pivot, on multiplie tous les coefficients de la ligne par l'inverse du pivot. Tous les pivots sont maintenant égaux à 1.

– On se place ensuite au niveau du second pivot. On ajoute aux lignes au dessus du pivot un multiple de la ligne contenant le pivot afin d'annuler tous les coefficients au dessus du pivot.

– On répète l'opération précédente pour tous les pivots, de manière ordonnée, en traitant les pivots de gauche à droite.

**Exemple**

On reprend l'exemple précédent, avec la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \text{Forme échelonnée réduite}$$

**3.2 Résolution de systèmes linéaires**

L'algorithmme précédent fait appel aux opérations suivantes :

- ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne,
- permuter deux lignes,
- multiplier les coefficients d'une ligne par le même facteur.

Ces opérations ne modifient pas les solutions du système linéaire associé à la matrice. Il permet donc de ramener sa résolution à celle d'un système échelonné réduit.

**Exemple**

On résout le système linéaire associé à la matrice donnée dans les exemples précédents. Soit  $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbf{R}^4$ , on cherche les vecteurs  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathbf{R}^3$  satisfaisant le système

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 = y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 12x_3 = y_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_4 \end{cases}$$

En appliquant les mêmes opérations sur les lignes que dans l'exemple précédent, on obtient le système équivalent suivant.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 \\ x_2 + x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 \\ 0 = -\frac{3}{2}y_2 + y_3 \\ 0 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{4}y_2 + y_4 \end{cases}$$

Il n'y a de solutions que si  $-\frac{3}{2}y_2 + y_3 = 0$  et  $\frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{4}y_2 + y_4 = 0$ .

Les solutions sont alors de la forme

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - 3\lambda \\ x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

pour  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Il y a une infinité de solutions, une pour chaque valeur de  $\lambda$ .

Pour éviter les erreurs de calcul, il est utile de garder les variables chacune dans sa colonne.

**Méthode :** *résolution des systèmes linéaires généraux*

On peut procéder comme suit pour alléger la résolution d'un système linéaire de la forme  $Ax = y$  : on concatène la matrice identité à droite de la matrice  $A$ . Dans l'exemple précédent, cela produit la matrice

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On applique alors l'algorithme de Gauss à cette matrice. On obtient

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Les coefficients de cette matrice sont ceux du système réduit associé.

### 3.3 Interprétation matricielle

Afin d'étudier l'algorithme de Gauss plus en détail, notons une matrice  $A$  dont les lignes sont données par les vecteurs lignes  $L_1, \dots, L_m$  comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$$

Ajouter un multiple de la première ligne à la seconde ligne revient à multiplier la matrice  $A$  à gauche par la matrice obtenue en remplaçant le coefficient d'indice 1,2 de l'identité par le coefficient multiplicateur désiré :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 + \lambda L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}.$$

Échanger les deux premières lignes revient à multiplier la matrice  $A$  à gauche par la matrice qui permute les deux premiers vecteurs de la base canonique :

$$\begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}.$$

Les autres opérations sur les lignes qui interviennent dans l'algorithme se traduisent toutes sous la forme d'un produit à gauche par une matrice inversible. Ceci implique le théorème suivant.

**Théorème 1** *Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Alors il existe une matrice  $P$  de taille  $m \times m$  inversible et une matrice échelonnée réduite  $R$  de taille  $m \times n$  telle que*

$$R = PA.$$

Pour calculer la matrice  $P$ , on procède comme suit.

- On concatène l'identité à la matrice  $A$  par la droite.
- On applique l'algorithme de Gauss à cette nouvelle matrice.

Ceci revient à multiplier à gauche notre matrice  $(A \mid id)$  par la matrice  $P$  vue plus haut. La matrice obtenue vaut donc  $P(A \mid id) = (PA \mid P) = (R \mid P)$  ce qui donne  $R$  et  $P$ .

### Exemple

Le calcul de l'exemple précédent donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $P$  est parfois qualifiée de pseudo-inverse. De fait, si  $A$  est une matrice carrée inversible, sa forme échelonnée réduite est égale à l'identité et  $P$  est l'inverse de  $A$ . Ceci donne une méthode efficace pour calculer l'inverse d'une matrice carrée.

### Méthode : inversion d'une matrice

Soit  $A$  une matrice carrée ( $m = n$ ) à inverser.

- On concatène la matrice identité à droite pour obtenir la matrice  $(A \mid id)$ .
- On met  $(A \mid id)$  sous forme échelonnée réduite par l'algorithme de Gauss.

Si la matrice  $A$  est inversible, l'algorithme produira la matrice  $(id \mid A^{-1})$ .

Si la matrice  $A$  n'est pas inversible, la partie gauche de la matrice donnée par l'algorithme sera échelonnée mais avec certains termes diagonaux nuls.

Voici quelques corollaires qui découlent des considérations précédentes.

**Corollaire 1**

- Le noyau d'une matrice est égal au noyau de sa forme échelonnée réduite.
- Le rang d'une matrice est égal au rang de sa forme échelonnée réduite.

Attention, l'image d'une matrice n'est pas égale à l'image de sa forme échelonnée réduite. On peut malgré tout se servir de la forme échelonnée pour obtenir une base de l'image de la matrice.

**Corollaire 2** Une base de  $\text{im}(A)$  est formée des colonnes de  $A$  situées aux mêmes positions que les colonnes de  $R$  contenant un pivot.

**Méthode :** calcul d'une base du noyau ou de l'image d'une matrice

Pour le calcul du noyau, il suffit de calculer le noyau de sa forme échelonnée réduite. Pour l'image, on sélectionne les colonnes de la matrice en fonction de la position des pivots dans la forme échelonnée réduite.

**Exemple**

Considérons la matrice  $A$  de l'exemple précédent. Sa forme échelonnée réduite  $R$  a deux pivots, les matrices  $R$  et  $A$  sont donc de rang 2. Le noyau de  $A$  est égal au noyau de  $R$ , que nous avons déjà calculé.

$$\ker(A) = \ker(R) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Les colonnes de  $R$  qui contiennent des pivots sont les colonnes 1 et 2. Les colonnes 1 et 2 de  $A$  forment donc une base de  $\text{im}(A)$ .

$$\text{im}(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

### 3.4 Applications

Mettre une matrice sous forme échelonnée permet de :

- calculer le rang d'une matrice,  
*il est égal au nombre de pivots de sa forme échelonnée*
- calculer la dimension du noyau d'une matrice,  
*il est égal au nombre de colonnes de la forme échelonnée sans pivots*
- calculer le noyau d'une matrice,  
*il est égal au noyau de sa forme échelonnée*
- calculer une base de l'image d'une matrice,  
*prendre les colonnes de la matrice associées aux pivots de la forme réduite*
- déterminer le rang d'une famille de vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ ,  
*calculer le rang de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs donnés*

- déterminer si une famille de vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  est libre,  
*le rang de la famille doit être égal à son nombre de vecteurs*
- résoudre un système d'équations linéaires avec second membre,  
*mettre le système sous forme échelonnée réduite*
- calculer l'inverse d'une matrice carrée,  
*c'est équivalent à la résolution d'un système linéaire*
- passer d'une représentation cartésienne d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$  à une représentation paramétrique de cet espace et vice-versa.

Détaillons ce dernier point. Un sous-espace vectoriel  $E$  de  $\mathbf{R}^n$  peut se représenter par un système d'équations cartésiennes ou par un système d'équations paramétriques.

#### *Équations cartésiennes*

Dans le premier cas, on dispose de  $m$  équations linéaires pour notre sous-espace  $E$ .

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Un vecteur de  $\mathbf{R}^n$  est dans  $E$  si et seulement si ses coordonnées satisfont toutes ces équations. Notons  $A$  la matrice donnée par les coefficients  $\{a_{i,j}\}$ . Un vecteur  $x \in \mathbf{R}^n$  appartient à  $E$  si et seulement si  $Ax = 0$ . En d'autres termes,

$$E = \ker(A)$$

et la dimension de  $E$  est égale à la dimension du noyau de la matrice  $A$ .

#### *Équations paramétriques*

Dans le second cas, on dispose de  $k$  paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Chaque valeur prise par ces paramètres donne les coordonnées d'un point du sous-espace vectoriel.

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,1}\lambda_1 + c_{1,2}\lambda_2 + \dots + c_{1,k}\lambda_k \\ x_2 = c_{2,1}\lambda_1 + c_{2,2}\lambda_2 + \dots + c_{2,k}\lambda_k \\ \vdots \\ x_n = c_{n,1}\lambda_1 + c_{n,2}\lambda_2 + \dots + c_{n,k}\lambda_k \end{cases}$$

Notons  $C$  la matrice donnée par les coefficients  $\{c_{i,j}\}$ . Un vecteur est dans  $E$  si et seulement si il est de la forme  $C\lambda$ , où  $\lambda$  est le vecteur de  $\mathbf{R}^k$  de coordonnées  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . En d'autres termes,

$$E = \text{im}(C)$$

et la dimension de  $E$  est égale au rang de la matrice  $C$ .

**Méthode :** *calcul d'équations paramétriques pour un sous-espace de  $\mathbf{R}^n$*

Pour passer d'un système d'équations cartésiennes à un système d'équations paramétriques, il suffit de résoudre le système linéaire définissant l'espace  $E$  en échelonnant la matrice associée. Lors de la résolution, on introduit autant de paramètres qu'il y a de variables non principales dans le système échelonné.

**Exemple**

Considérons le sous-espace de  $\mathbf{R}^3$  défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

C'est un cas particulier d'un système que nous avons résolu précédemment, les solutions sont de la forme

$$\begin{cases} x_1 = -3\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

L'espace vectoriel considéré est de dimension un, il est engendré par le vecteur  $(-3, -1, 1)$ , on parle de droite vectorielle.

**Méthode :** *calcul d'équations cartésiennes pour un sous-espace de  $\mathbf{R}^n$*

Pour passer d'un système d'équations paramétriques à un système d'équations cartésiennes, on résout à nouveau le système en considérant les  $\lambda_i$  comme des variables à exprimer en fonction des  $c_{i,j}$  et des  $x_j$ . Certaines des solutions obtenues ne comporteront pas les variables  $\lambda_i$ , ce sont les équations cartésiennes recherchées.

**Exemple**

Considérons le plan de  $\mathbf{R}^3$  engendré par les deux vecteurs  $(1,2,3)$  et  $(4,5,6)$ . Un vecteur de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  est dans ce plan s'il s'exprime comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs, c'est-à-dire si on peut trouver  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$  tels que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

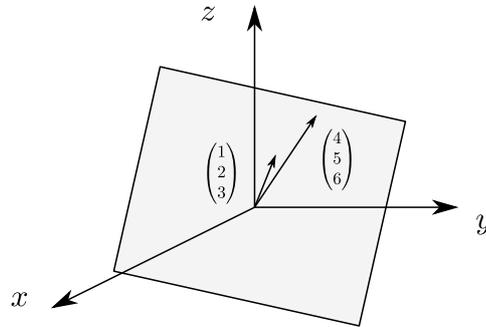
L'équation paramétrique de ce plan est donc

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ x_2 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ x_3 = 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{cases}$$

Appliquons le pivot de Gauss relativement aux variables  $(\lambda_1, \lambda_2)$  :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ x_2 - 2x_1 = -3\lambda_2 \\ x_3 - 3x_1 = -6\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = & \lambda_1 & + & 4\lambda_2 \\ x_2 - 2x_1 & = & & - & 3\lambda_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & & & 0 \end{cases} \leftarrow \text{équation cartésienne du plan}$$



Expliquons enfin comment obtenir des bases explicites pour les sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^n$ .

**Méthode :** calcul d'une base d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$

Si on dispose d'un système d'équations cartésiennes associé à une matrice  $A$ , il suffit de calculer une base du noyau de  $A$ , comme cela a été expliqué précédemment. Si on dispose d'un système d'équations paramétriques associé à une matrice  $C$ , il suffit de calculer une base de l'image de  $C$ .

**Exemple**

Calculons une base d'un sous-espace de  $\mathbf{R}^n$  défini par une seule équation cartésienne de la forme

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.$$

dans le cas où  $a_1$  est non nul. La variable  $x_1$  est la seule variable principale ce qui amène à introduire  $n - 1$  paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On pose  $x_2 = \lambda_1, \dots, x_n = \lambda_{n-1}$  et on exprime  $x_1$  en fonction de ces paramètres.

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{a_1}(a_2\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_{n-1}) \\ x_2 &= \lambda_1 \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda_{n-1} \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -a_3/a_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-1} \begin{pmatrix} -a_n/a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La base est composée des  $n - 1$  vecteurs situés dans le terme de droite.



## Chapitre 2

# Formes quadratiques

L'étude des formes bilinéaires symétriques passe par un algorithme de réduction qui permet de décomposer toute forme quadratique en carrés de formes linéaires indépendantes.

Ce chapitre commence donc par l'étude du concept de forme linéaire avant de présenter les notions clés concernant les formes quadratiques : noyau, rang, changement de base, signature. On termine par une application à l'étude des coniques et des quadriques.

### 1. Formes linéaires

#### 1.1 Définition d'une forme linéaire

**Définition 4** Soit  $E$  un espace vectoriel réel. Une forme linéaire sur  $E$  est une application linéaire définie de  $E$  dans  $\mathbf{R}$ .

Une forme linéaire est donc une fonction  $l : E \rightarrow \mathbf{R}$  qui satisfait, pour tout  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$l(\lambda x + y) = \lambda l(x) + l(y).$$

On définit de manière analogue la notion de forme linéaire sur un espace vectoriel complexe en remplaçant  $\mathbf{R}$  par  $\mathbf{C}$  dans ce qui précède.

**Définition 5** L'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel  $E$  est noté  $E^*$ . C'est l'espace vectoriel dual de  $E$ .

#### Exemples

- Soit  $E$  un espace vectoriel quelconque. La fonction nulle, qui associe à tout vecteur de  $E$  le réel 0 est une forme linéaire.
- Soit  $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ . La fonction  $l(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$  est une forme linéaire définie sur  $\mathbf{R}^2$ .
- Notons  $C^0([0,1], \mathbf{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur l'intervalle  $[0,1]$  à valeurs réelles. L'application

$$f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$$

est une forme linéaire sur  $C^0([0,1], \mathbf{R})$ .

**Proposition 3** *Les formes linéaires définies sur  $\mathbf{R}^n$  sont les fonctions de la forme*

$$l(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

*Les réels  $a_1, \dots, a_n$  sont les coefficients de la forme linéaire  $l$ .*

Vérifions que toute forme linéaire est bien de cette forme. Pour cela, posons  $a_1 = l(1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $a_n = l(0, 0, \dots, 1)$ . Par linéarité,

$$l(x_1, \dots, x_n) = x_1 l(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n l(0, 0, \dots, 1) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

## 1.2 Noyau d'une forme linéaire

Le noyau d'une forme linéaire définie sur  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Nous allons caractériser ces sous-espaces par leur dimension.

**Définition 6** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$  est appelé hyperplan de  $E$ .*

### Exemple

- Si  $E$  est de dimension 2, les hyperplans de  $E$  sont des droites.
- Si  $E$  est de dimension 3, les hyperplans de  $E$  sont des plans.

D'un point de vue géométrique, les vecteurs dirigent des droites vectorielles. Les formes linéaires dirigent des hyperplans.

**Proposition 4** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ .*

- *Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.*
- *Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*
- *Deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.*

### Preuve

Le premier point découle de la formule du rang. Soit  $l$  une forme linéaire.

$$\dim \ker(l) + \text{rang}(l) = n.$$

Si  $l$  est nulle, son image est égale à  $\{0\}$  et  $\text{rang}(l) = 0$ .

Si  $l$  est non nulle, son image est égale à  $\mathbf{R}$  et  $\text{rang}(l) = 1$ .

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $e_1, \dots, e_{n-1}$  une base de  $H$ . Soit  $e_n$  un vecteur de  $E$  qui n'est pas dans  $H$ . Il n'est pas combinaison des  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , la famille  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$  est donc libre, c'est une base de  $E$ . Un vecteur  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$  de  $E$  est dans  $H$  si et seulement si il s'exprime en fonction de  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $x_n = 0$ . C'est donc le noyau de la forme linéaire définie par  $l(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_n$ .

Soit  $l_1, l_2 \in E^*$  non nulles telles que  $H = \ker(l_1) = \ker(l_2)$ . Dans la base de  $E$  qu'on vient de considérer,  $l_1(e_i) = l_2(e_i) = 0$  si  $i < n$ . On en déduit

$$l_1\left(\sum x_i e_i\right) = x_n l_1(e_n), \quad l_2\left(\sum x_i e_i\right) = x_n l_2(e_n),$$

d'où  $l_1 = \frac{l_1(e_n)}{l_2(e_n)} l_2$ . Ces deux formes sont bien proportionnelles.

**Corollaire 3** *Tout hyperplan de  $\mathbf{R}^n$  est de la forme*

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

*et les coefficients  $a_1, \dots, a_n$  sont définis à un facteur multiplicatif près.*

### 1.3 Base duale

Lorsque  $E$  est de dimension finie, on peut associer à toute base de  $E$  une base de  $E^*$  en procédant comme suit.

**Définition 7** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Les applications*

$$e_k^* \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = x_k$$

*sont des formes linéaires sur  $E$ . La famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  forme une base de  $E^*$  appelée base duale de  $(e_1, \dots, e_n)$ . Pour tout  $x \in E$ , nous avons*

$$x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i.$$

L'application  $e_i^*$  associe à un vecteur sa  $i^{\text{ème}}$  coordonnée. On parle parfois d'application coordonnée. Remarquons que  $e_k^*(e_i) = 0$  si  $i \neq k$  et  $e_k^*(e_k) = 1$ .

#### Preuve

Vérifions que les  $(e_k^*)$  forment une base de  $E^*$ .

*La famille  $(e_k^*)$  est libre*: soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\sum_k \lambda_k e_k^* = 0$ .

$$0 = \left( \sum_k \lambda_k e_k^* \right) (e_i) = \sum_k \lambda_k e_k^*(e_i) = \lambda_i.$$

Tous les coefficients  $\lambda_i$  sont donc nuls.

*La famille  $(e_k^*)$  est génératrice*: Soit  $l \in E^*$ ,  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ . Par linéarité,

$$l(x) = l\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k l(e_k) = \sum_{k=1}^n l(e_k) e_k^*(x).$$

On a donc  $l = \sum l(e_k)e_k^*$ , la forme  $l$  est combinaison linéaire des  $e_k^*$ .

On en déduit les deux résultats suivants.

**Corollaire 4** *Les coordonnées d'une forme linéaire  $l \in E^*$  dans la base  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  valent*

$$l(e_1), l(e_2) \dots, l(e_n).$$

*L'espace  $E^*$  est de dimension finie et  $\dim E^* = \dim E$ .*

On convient de représenter les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée  $(e_i)$  de  $E$  sous forme de vecteur colonne et de représenter les coordonnées d'une forme linéaire dans la base duale  $(e_i^*)$  de  $E^*$  sous forme de vecteur ligne. Avec cette convention, si  $x \in E$  et  $l \in E^*$  ont pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } (a_1 \dots a_n),$$

alors la quantité  $l(x)$  s'obtient en faisant le produit des deux vecteurs

$$l(x) = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

#### 1.4 Le cas de $\mathbf{R}^n$

*Base canonique*

Rappelons ce qu'est la *base canonique* de  $\mathbf{R}^n$ . Avec la convention qui consiste à représenter les vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  sous forme de colonnes, il s'agit de la famille de vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tout vecteur de  $\mathbf{R}^n$  s'exprime dans cette base comme suit.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a convenu de représenter les éléments du dual  $\mathbf{R}^{n*}$  sous forme de vecteurs lignes. Les éléments de la base duale de la base canonique sont alors

$$(1 \ 0 \ \dots \ 0), \ (0 \ 1 \ \dots \ 0), \dots, \ (0 \ 0 \ \dots \ 1).$$

Tout vecteur de  $\mathbf{R}^{n*}$  s'exprime alors dans cette base de la façon suivante.

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) &= x_1 (1 \ 0 \ \dots \ 0) \\ &\quad + x_2 (0 \ 1 \ \dots \ 0) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + x_n (0 \ 0 \ \dots \ 1). \end{aligned}$$

La base duale de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  est appelée base canonique de  $\mathbf{R}^{n*}$ .

### *Indépendance*

Les formes linéaires sont les éléments d'un espace vectoriel. On peut donc s'intéresser à l'indépendance d'une famille de formes linéaires. Rappelons qu'une famille de vecteurs est linéairement indépendante s'il n'y a pas de relation linéaire non triviale entre ces vecteurs.

**Méthode :** *indépendance d'une famille de formes linéaires*

Pour déterminer si une famille de formes linéaires  $(l_1, \dots, l_k)$  est linéairement indépendante, on décompose cette famille dans une base et on forme la matrice dont les lignes sont données par les vecteurs lignes associés à chacune des formes linéaires. La famille est linéairement indépendante si et seulement si le rang de cette matrice est égal à  $k$ .

### **Exemple**

On considère les trois formes linéaires définies sur  $\mathbf{R}^3$  par

$$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2, \\ l_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2 + x_3, \\ l_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - x_3. \end{aligned}$$

Les coordonnées de ces formes linéaires dans la base canonique sont

$$(1 \ 1 \ 0), \quad (0 \ 1 \ 1), \quad (1 \ 0 \ -1).$$

La matrice obtenue en empilant ces lignes est égal à  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

On détermine son rang en la mettant sous forme échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

Elle est de rang 2. La famille n'est donc pas linéairement indépendante. On aurait pu aller plus vite en remarquant directement qu'il y a une relation linéaire non triviale entre les formes linéaires  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  :  $l_1 = l_2 + l_3$ .

Remarquons pour finir que deux vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas proportionnels. De même, deux formes sont

linéairement indépendantes si et seulement si elles ne sont pas proportionnelles.

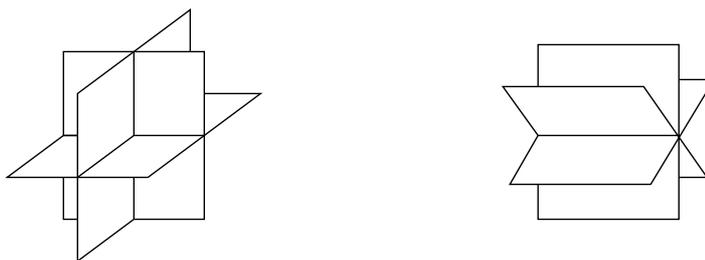
*Lien avec les systèmes linéaires*

Considérons un système linéaire homogène sur  $\mathbf{R}^n$  de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Définissons des formes linéaires  $l_i$  en posant  $l_i(x) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n$ . Nous voyons qu'un vecteur est solution du système si et seulement s'il annule toutes ces formes linéaires, c'est-à-dire s'il appartient à  $\ker(l_i)$  pour tout  $i$ . Géométriquement, l'espace vectoriel des solutions du système est une intersection d'hyperplans.

Considérons le cas  $n = 3$  et supposons les hyperplans tous distincts. Si le système est de rang trois, seul le vecteur nul est solution du système et les trois hyperplans se rencontrent en l'origine seulement. S'il est de rang deux, les trois hyperplans se rencontrent selon une droite.



## 2. Formes bilinéaires

### 2.1 Définition d'une forme bilinéaire

**Définition 8** Soit  $E$  un espace vectoriel réel. Une forme bilinéaire est une fonction définie sur  $E \times E$  à valeurs réelles qui est linéaire en chacune de ses variables.

Il s'agit donc d'une fonction  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  qui satisfait pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

- $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ ,
- $\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, z)$ .

**Définition 9** Une forme bilinéaire est symétrique si pour tout  $x, y \in E$ ,

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

**Exemples**

- Sur  $\mathbf{R}$ , les formes bilinéaires sont de la forme  $\varphi(x,y) = axy$  pour  $a \in \mathbf{R}$ .
- Le produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^n$  est une forme bilinéaire symétrique. Pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ , il est donné par

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

- Soit  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  et  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ . La fonction suivante est une forme bilinéaire sur  $\mathbf{R}^2$  :

$$\varphi(x,y) = ax_1 y_1 + bx_1 y_2 + cx_2 y_1 + dx_2 y_2.$$

Elle est symétrique si et seulement si  $b = c$ .

- Sur l'espace vectoriel  $C^0([0,1], \mathbf{R})$ , la fonction suivante est une forme bilinéaire symétrique.

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Nous verrons que cet exemple joue un rôle important en analyse.

**2.2 Représentation matricielle**

On se place maintenant dans le cadre de la dimension finie. On va associer une matrice à toute forme bilinéaire.

**Définition 10** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $E$ . La matrice de  $\varphi$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est la matrice carrée

$$B = \{\varphi(e_i, e_j)\}_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \dots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \dots & \varphi(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

La forme  $\varphi$  est symétrique si et seulement si sa matrice est symétrique.

**Exemple**

- La matrice associée à la forme bilinéaire sur  $\mathbf{R}^2$  donnée par

$$\varphi(x,y) = ax_1 y_1 + bx_1 y_2 + cx_2 y_1 + dx_2 y_2$$

est la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

- La matrice associée au produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^n$  est la matrice identité.

Réciproquement, à une matrice carrée  $B$  de taille  $n \times n$ , on peut associer une forme bilinéaire sur  $\mathbf{R}^n$  en posant

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= {}^t x B y \\
&= \sum_{i,j} x_i b_{i,j} y_j \\
&= b_{1,1} x_1 y_1 + b_{1,2} x_1 y_2 + \dots + b_{n,n} x_n y_n \\
&= (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On a noté  $(x_1, \dots, x_n)$  les coefficients du vecteur  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$  ceux de  $y$  et  $\{b_{i,j}\}$  ceux de la matrice  $B$ . On vérifie immédiatement que  $b_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ , où les  $(e_i)$  sont les vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . La matrice  $B$  est bien la matrice associée à cette forme bilinéaire.

### 2.3 Changement de base

La matrice associée à une forme bilinéaire symétrique dépend de la base choisie pour la représenter. Expliquons comment cette matrice est transformée lorsqu'on effectue un changement de base.

Rappelons comment est définie la *matrice de passage* entre deux bases  $(e_i)_{i=1..n}$  et  $(e'_i)_{i=1..n}$  d'un espace de dimension finie. Il s'agit de la matrice dont les colonnes sont composées des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $(e'_i)$  dans l'ancienne base  $(e_i)$ . Notons cette matrice  $P = \{p_{i,j}\}$ .

$$e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i.$$

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne base et  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  les coordonnées dans la nouvelle base. On a alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad x_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j.$$

Les matrices  $A$  et  $A'$  d'une application linéaire  $f : E \rightarrow E$  dans les bases  $(e_i)$  et  $(e'_i)$  satisfont la relation

$$A' = P^{-1} A P.$$

On dit que les matrices  $A$  et  $A'$  sont *conjuguées*. La relation qui lie les matrices associées à une forme bilinéaire est différente.

**Proposition 5** Soit  $E$  un espace de dimension finie muni de deux bases  $(e_i)_{i=1..n}$ ,  $(e'_i)_{i=1..n}$  et d'une forme bilinéaire  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ . Notons par  $P$  la matrice de passage entre ces deux bases et  $B, B'$  les matrices de  $\varphi$  dans chacune des bases. Alors

$$B' = {}^t P B P.$$

**Preuve**

$$\varphi(x,y) = {}^t x B y = {}^t (P x') B (P y') = {}^t x' ({}^t P B P) y'.$$

Deux matrices carrées  $B$  et  $B'$  liées par une relation de la forme  $B' = {}^t P B P$ , où  $P$  est une matrice inversible, sont dites *congruentes*.

**2.4 Rang et noyau**

**Définition 11** *Le noyau d'une forme bilinéaire est défini par*

$$\ker(\varphi) = \{y \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0\}.$$

*Une forme bilinéaire est dite non dégénérée si son noyau est restreint au vecteur nul :  $\ker(\varphi) = \{0\}$ .*

Il s'agit des vecteurs  $y \in E$  pour lesquels  $\varphi(x,y)$  est nul pour tout  $x \in E$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Dans une base donnée, il coïncide avec le noyau de la matrice associée à la forme bilinéaire.

**Exemples**

– La forme bilinéaire sur  $\mathbf{R}^2$  définie par  $\varphi(x,y) = x_1 y_1$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Son noyau est constitué des vecteurs dont la première coordonnée s'annule :

$$\ker(\varphi) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

– Un exemple de forme bilinéaire non dégénérée est donné par le produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^n$ . De fait, la matrice associée est l'identité, son noyau est bien restreint à  $\{0\}$ .

– La forme bilinéaire définie sur  $C^0([0,1], \mathbf{R})$  par  $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$  est elle aussi non dégénérée. De fait, si  $\varphi(f,g) = 0$  pour tout  $g$ , on peut prendre  $g = f$  et obtenir  $\int f(t)^2 dt = 0$ . On conclut en utilisant le résultat suivant d'intégration : Une fonction continue positive dont l'intégrale est nulle est identiquement nulle.

**Définition 12** *Le rang d'une forme bilinéaire définie sur un espace vectoriel de dimension fini est égal au rang de sa matrice. Il ne dépend pas de la base choisie pour exprimer cette matrice.*

La formule du rang pour les matrices entraîne

$$\dim \ker(\varphi) + \text{rang}(\varphi) = \dim E.$$

Terminons en remarquant que l'ensemble des formes bilinéaires symétriques est un espace vectoriel. On combine deux formes bilinéaires  $\varphi_1, \varphi_2$  définies sur un même espace par la formule

$$(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(x,y) = \lambda\varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y).$$

### 3. Formes quadratiques

#### 3.1 Définition d'une forme quadratique

On se concentre maintenant sur l'étude des formes bilinéaires symétriques. On va associer à une telle forme un polynôme de degré deux à plusieurs variables qu'on pourra ensuite simplifier comme on le faisait avec les polynômes quadratiques à une variable.

**Définition 13** Une forme quadratique  $Q$  définie sur un espace vectoriel réel  $E$  est une fonction de  $E$  dans  $\mathbf{R}$  de la forme  $\varphi(x,x)$ , où  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  est une forme bilinéaire symétrique.

$$\forall x \in E, \quad Q(x) = \varphi(x,x).$$

La forme bilinéaire  $\varphi$  est appelée *forme polaire* de  $Q$ . Soit  $E$  un espace de dimension finie muni d'une base  $(e_i)_{i=1..n}$ . Donnons l'expression générale d'une forme quadratique en coordonnées. Soit  $B$  la matrice de la forme bilinéaire associée à  $Q$ . Alors

$$Q\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = {}^t x B x = \sum_{i,j} b_{i,j} x_i x_j = \sum_i b_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} b_{i,j} x_i x_j.$$

Cette expression est un polynôme à plusieurs variables, dont tous les termes sont de degré total deux.

#### Exemples

– Considérons la forme quadratique sur  $\mathbf{R}^2$  pour laquelle  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . Alors

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

– La forme quadratique associée au produit scalaire usuel de  $\mathbf{R}^n$  vaut

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

C'est le carré de la longueur du vecteur  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Étant donnée une forme quadratique  $Q$ , il n'existe qu'une seule forme bilinéaire symétrique pour laquelle on a  $Q(x) = \varphi(x,x)$  pour tout  $x$ . On l'obtient par le biais des formules suivantes.

#### Proposition 6

$$\begin{aligned} Q(\lambda x) &= \lambda^2 Q(x), & Q(x+y) &= Q(x) + 2\varphi(x,y) + Q(y), \\ \varphi(x,y) &= \frac{1}{2} \left( Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \right), \\ \varphi(x,y) &= \frac{1}{2} \left( Q(x) + Q(y) - Q(x-y) \right), \\ \varphi(x,y) &= \frac{1}{4} \left( Q(x+y) - Q(x-y) \right). \end{aligned}$$

Les trois dernières formules s'appellent *identités de polarisation*. Démontrons les par un calcul direct.

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= \varphi(x+y, x+y) \\ &= \varphi(x,x) + \varphi(y,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &= Q(x) + 2\varphi(x,y) + Q(y). \end{aligned}$$

$$Q(x-y) = Q(x+(-y)) = Q(x) - 2\varphi(x,y) + Q(y).$$

Il suffit de soustraire ces deux égalités pour obtenir la dernière formule.

En pratique, lorsque l'espace est de dimension finie, on calcule facilement la matrice  $B$  associée à une forme quadratique à partir des coefficients de son polynôme.

**Méthode :** *calcul de la matrice associée à une forme quadratique*

Pour calculer la matrice associée à une forme quadratique, on place sur la diagonale les coefficients des carrés  $x_i^2$  apparaissant dans le polynôme de degré deux définissant  $Q$ . Pour les termes qui ne sont pas sur la diagonale, il faut diviser par deux les coefficients des termes  $x_i x_j$  du polynôme.

**Exemple**

Soit  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3$ . La matrice associée vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit également le *rang* et le *noyau* d'une forme quadratique. Ils sont égaux au rang et au noyau de la forme bilinéaire symétrique ou de la matrice associée.

Il reste une dernière notion à introduire.

**Définition 14** *Soit  $Q$  une forme quadratique sur un espace vectoriel  $E$ . Le cône des vecteurs isotropes de  $Q$  est défini par*

$$C(Q) = \{x \in E \mid Q(x) = 0\}.$$

*Un vecteur  $x \in E$  satisfaisant  $Q(x) = 0$  est dit isotrope.*

On verra plus loin pourquoi on parle de cône. Il est important de remarquer que ce cône n'est pas un espace vectoriel en général. Il contient toujours le noyau de la forme quadratique :

$$\ker(Q) \subset C(Q).$$

**Exemple**

Soit  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ . La matrice associée est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . La forme quadratique est donc de rang deux et  $\ker(Q) = \{0\}$ . Calculons son cône.

$$Q(x_1, x_2) = 0 \text{ implique } (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

c'est-à-dire  $x_1 = x_2$  ou  $x_1 = -x_2$ . Le cône  $C(Q)$  est l'union des deux droites vectorielles dirigées par les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

### 3.2 Signature

On va introduire un invariant important des formes quadratiques, relié au signe que peuvent prendre ses valeurs.

**Définition 15** Une forme quadratique est dite

- positive si pour tout  $x \in E$ ,  $Q(x) \geq 0$ ,
- définie positive si pour tout  $x \in E$  non nul,  $Q(x) > 0$ ,
- négative si pour tout  $x \in E$ ,  $Q(x) \leq 0$ ,
- définie négative si pour tout  $x \in E$  non nul,  $Q(x) < 0$ .

**Proposition 7** Une forme quadratique définie positive est non dégénérée.

De fait,  $\ker(Q) \subset C(Q)$  et le cône est nul dans le cas non dégénéré par définition :  $C(Q) = \{x \mid Q(x) = 0\} = \{0\}$ .

#### Exemple

Le produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^n$  est défini positif.

En effet,  $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum x_k^2 > 0$  dès que  $(x_1, \dots, x_n)$  est non nul.

On peut toujours restreindre une forme quadratique à un sous-espace vectoriel de  $E$ . On notera  $Q|_F$  la restriction de  $Q$  à un sous-espace  $F \subset E$ . Remarquons qu'une forme quadratique qui est définie positive sur un espace vectoriel  $E$  est automatiquement définie positive en restriction à tous les sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Nous allons nous intéresser à la dimension maximale des sous-espaces en restriction desquels  $Q$  est définie positive ou définie négative.

**Définition 16** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $Q$  une forme quadratique sur  $E$ . La signature de  $Q$  est le couple d'entiers  $(p, q) \in \mathbf{N}$  donné par

$$p = \max\{\dim F \mid F \text{ sous-espace de } E \text{ tel que } Q|_F \text{ est définie positive}\}$$

$$q = \max\{\dim F \mid F \text{ sous-espace de } E \text{ tel que } Q|_F \text{ est définie négative}\}$$

#### Exemple

Une forme quadratique  $Q$  sur un espace  $E$  de dimension  $n$  qui est définie positive est de signature  $(n, 0)$ . C'est le cas par exemple pour le produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^n$ .

De fait, pour une forme quadratique définie positive, le plus grand espace sur lequel  $Q$  est définie positive est  $E$  lui-même. Si  $F$  est un espace sur lequel  $Q$  est définie négative, il ne peut pas contenir de vecteur  $x$  non nul, car on aurait pour ce vecteur  $Q(x) > 0$  et  $Q(x) < 0$ . Le sous-espace  $F = \{0\}$  est le seul sur lequel  $Q$  est définie négative.

### 3.3 Réduction des formes quadratiques

L'étude des formes quadratiques repose sur un algorithme dû à F. Gauss, qui permet de simplifier l'expression d'une forme quadratique en l'écrivant sous forme d'une somme de carrés de formes linéaires.

**Théorème 2** *Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $Q$  une forme quadratique sur  $E$  de signature  $(p,q)$ . Alors il existe  $p+q$  formes linéaires indépendantes  $l_1, \dots, l_{p+q} \in E^*$  telles que*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^p l_i(x)^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} l_j(x)^2.$$

Cette décomposition en carrés de formes linéaires n'est pas unique. Cependant, on peut toujours calculer la signature de la forme quadratique à partir d'une telle décomposition, si les formes linéaires sont indépendantes entre elles.

**Proposition 8** *Considérons une forme quadratique donnée par l'expression*

$$Q(x) = \pm l_1(x)^2 \pm l_2(x)^2 \pm \dots \pm l_k(x)^2.$$

*où les  $l_i$  sont des formes linéaires indépendantes entre elles. Alors la signature est donnée par le nombre de signes + et le nombre de signes - apparaissant dans cette décomposition.*

La preuve de cette proposition sera donnée plus loin (en 3.6, page 38).

**Méthode :** *réduction des formes quadratiques*

On se place dans une base arbitraire,  $Q$  prend la forme

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_i b_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{i,j} x_i x_j.$$

• Si un des coefficients diagonaux  $b_{i,i}$  est non nul, disons  $b_{1,1} \neq 0$ , on considère le polynôme comme une fonction de la variable  $x_1$  et on le met sous forme canonique, comme suit.

– On place le terme  $x_1^2$  en tête du polynôme et on met  $x_1$  en facteur dans les termes restants, si possible. L'expression de  $Q$  prend alors la forme

$$Q(x) = b_{1,1} \left[ x_1^2 + x_1(\dots) + (\dots) \right].$$

Les expressions entre parenthèses **ne doivent plus contenir la variable  $x_1$** .

Notons les  $a_1$  et  $a_2$  :

$$Q(x) = b_{1,1} \left[ x_1^2 + x_1 a_1 + a_2 \right].$$

– On factorise l'expression précédente en utilisant l'identité remarquable

$$x_1^2 + x_1 a_1 = \left( x_1 + \frac{a_1}{2} \right)^2 - \frac{a_1^2}{4}.$$

– On pose  $l_1(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{|b_{1,1}|}(x_1 + \frac{a_1}{2})$ . L'expression de  $Q$  devient

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \pm l_1(x_1, \dots, x_n)^2 + b_{1,1}(a_2 - \frac{a_1^2}{4}).$$

– L'expression  $a_2 - \frac{a_1^2}{4}$  ne fait plus intervenir la variable  $x_1$ . C'est une forme quadratique à laquelle on peut appliquer à nouveau l'algorithme. Le signe devant la forme linéaire  $l_1$  est celui de  $b_{1,1}$ .

• Si tous les coefficients diagonaux sont nuls, on considère un coefficient  $b_{i,j} \neq 0$ , disons  $b_{1,2}$  pour alléger les notations.

– On place le terme  $x_1x_2$  en tête du polynôme et on met  $x_1$  en facteur dans les termes restants, si possible. On fait de même avec  $x_2$ . On obtient

$$Q(x) = b_{1,2} [x_1x_2 + x_1(\dots) + x_2(\dots) + (\dots)].$$

Les expressions entre parenthèses **ne doivent plus contenir la variable**  $x_1$ . Notons les  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  :

$$Q(x) = b_{1,2} [x_1x_2 + x_1a_1 + x_2a_2 + a_3].$$

– On factorise l'expression précédente en utilisant l'identité remarquable

$$x_1x_2 + x_1a_1 + x_2a_2 = (x_1 + a_2)(x_2 + a_1) - a_1a_2.$$

– On convertit le produit  $(x_1 + a_2)(x_2 + a_1)$  en différence de deux carrés à l'aide de l'identité remarquable

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2.$$

L'expression de  $Q$  devient

$$Q(x) = b_{1,2} \left[ \left( \frac{x_1 + x_2 + a_1 + a_2}{2} \right)^2 - \left( \frac{x_1 - x_2 - a_1 + a_2}{2} \right)^2 - a_1a_2 + a_3 \right].$$

– On pose

$$\begin{aligned} l_1(x_1, \dots, x_n) &= \sqrt{|b_{1,2}|}(x_1 + x_2 + a_1 + a_2) \\ l_2(x_1, \dots, x_n) &= \sqrt{|b_{1,2}|}(x_1 - x_2 - a_1 + a_2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \pm l_1(x_1, \dots, x_n)^2 \mp l_2(x_1, \dots, x_n)^2 + b_{1,2}(a_3 - a_1a_2).$$

Le dernier terme dans l'expression précédente ne fait plus intervenir les variables  $x_1$  et  $x_2$ . C'est une forme quadratique à laquelle on peut appliquer à nouveau l'algorithme.

Au final, l'algorithme repose sur les trois règles suivantes.

**Règle 1 :**  $X^2 + Xa = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$

**Règle 2 :**  $XY + Xa_1 + Ya_2 = (X + a_2)(Y + a_1) - a_1a_2$

**Règle 3 :**  $XY = \frac{1}{4}(X + Y)^2 - \frac{1}{4}(X - Y)^2$ .

Remarquons que cet algorithme est une généralisation de la méthode de résolution des polynômes de degré deux à une variable.

Expliquons pourquoi la famille de formes linéaires données par l'algorithme est linéairement indépendante. Considérons la matrice dont les lignes sont données par les coordonnées de ces formes linéaires.

Si dans l'algorithme, nous disposons à chaque étape d'un coefficient diagonal non nul, la matrice obtenue est échelonnée, sans ligne nulle. Son rang est égal à son nombre de ligne, ce qui montre que ces lignes sont bien linéairement indépendantes entre elles.

Si à une certaine étape, il n'y a pas de termes diagonaux non nuls, l'algorithme produit deux formes linéaires  $l_1$  et  $l_2$  dont les expressions sont données plus haut. Il suffit de soustraire la première à la seconde pour mettre la matrice sous forme échelonnée.

### Exemples

–  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ .

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 &= \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_2^2}{4} + x_2^2 \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2. \end{aligned}$$

On pose

$$l_1(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2}{2}, \quad l_2(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2,$$

ce qui donne  $Q = l_1^2 + l_2^2$ . La signature vaut (2,0).

–  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ .

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - x_3^2 \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 - x_3^2. \end{aligned}$$

On pose

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{2}, \quad l_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad l_3(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

ce qui donne  $Q = l_1^2 - l_2^2 - l_3^2$ . La signature vaut (1,2).

### 3.4 Base orthogonale

À partir du théorème précédent, on peut construire une base de  $E$  dans laquelle  $Q$  est donnée par une expression particulièrement simple.

**Théorème 3** *Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $Q$  une forme quadratique sur  $E$  de signature  $(p,q)$ . Alors il existe une base  $(e_i)_{i=1..n}$  de  $E$  telle que*

$$Q(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Remarquons que la matrice de  $Q$  dans la base  $(e_i)$  est diagonale. Ceci montre que cette base vérifie  $\varphi(e_i, e_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ . On a noté  $\varphi$  la forme bilinéaire associée à  $Q$ . Ceci nous amène à la définition suivante.

**Définition 17** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique définie sur  $E$ . On dit qu'une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est orthogonale pour  $\varphi$  ou pour la forme quadratique  $Q$  associée à  $\varphi$  si*

$$\varphi(e_i, e_j) = 0 \text{ pour tout } i, j \text{ tels que } i \neq j.$$

Le théorème précédent implique donc :

**Proposition 9** *Toute forme bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel de dimension finie admet une base orthogonale.*

**Méthode :** *construction d'une base orthogonale*

On considère une forme quadratique définie sur  $\mathbf{R}^n$ .

– On applique l'algorithme de réduction de Gauss pour obtenir des formes linéaires  $l_1, \dots, l_{p+q}$  et on considère la matrice  $P$  dont les lignes sont données par les coordonnées de ces formes linéaires.

– Si  $p + q < n$ , il faut compléter la famille  $(l_i)$  de façon à obtenir une base de  $\mathbf{R}^{n*}$ . En pratique, il s'agit de rajouter à la matrice  $P$  des lignes afin d'en faire une matrice carrée inversible. On peut prendre ces lignes de la forme  $(0 \dots 1 \dots 0)$  en positionnant judicieusement les 1. Les placer dans les colonnes correspondant aux colonnes sans pivot de la forme échelonnée de  $P$  fonctionne.

– Les vecteurs recherchés ont pour coordonnées les colonnes de l'inverse de la matrice  $P$ .

Vérifions que cette procédure donne bien une base orthogonale. Par construction, la famille  $(e_k)$  obtenue satisfait  $l_i(e_k) = 0$  pour  $i \neq k$ . La base complétée  $(l_i)$  est duale à la base  $(e_k)$ . La forme polaire de  $Q = \sum l_i^2 - \sum l_j^2$  vaut

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^p l_i(x)l_i(y) - \sum_{j=p+1}^{p+q} l_j(x)l_j(y)$$

car cette forme est bilinéaire symétrique et satisfait  $Q(x) = \varphi(x, x)$ . On obtient alors  $\varphi(e_k, e_l) = \sum l_i(e_k)l_i(e_l) - \sum l_j(e_k)l_j(e_l) = 0$  si  $k \neq l$ .

**Exemples**

$$-Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = l_1(x_1, x_2, x_3)^2 - l_2(x_1, x_2, x_3)^2$$

avec

$$l_1(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2}{2}, \quad l_2(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2.$$

Les formes  $l_1$  et  $l_2$  ont pour coordonnées  $(1 \ \frac{1}{2})$  et  $(0 \ \frac{\sqrt{3}}{2})$ . On forme la matrice  $P$  dont les lignes sont données par ces vecteurs lignes.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Son inverse est donné par  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ .

Les colonnes de la matrice  $P^{-1}$  forment une base orthogonale pour  $Q$ .

$$\begin{aligned} -Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ &= l_1(x_1, x_2, x_3)^2 - l_2(x_1, x_2, x_3)^2 - l_3(x_1, x_2, x_3)^2 \end{aligned}$$

avec

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{2}, \quad l_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad l_3(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

Les formes  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  ont pour coordonnées  $\frac{1}{2}(1 \ 1 \ 2)$ ,  $\frac{1}{2}(1 \ -1 \ 0)$  et  $(0 \ 0 \ 1)$ . On forme la matrice dont les lignes sont données par ces vecteurs lignes.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à inverser :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Les colonnes de la matrice  $P^{-1}$  forment une base orthogonale pour  $Q$ .

$$\begin{aligned} -Q(x_1, x_2, x_3) &= 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= 4(x_1 + x_2)x_3 \\ &= l_1(x_1, x_2, x_3)^2 - l_2(x_1, x_2, x_3)^2 \end{aligned}$$

avec

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3.$$

Les formes  $l_1$  et  $l_2$  ont pour coordonnées  $(1 \ 1 \ 1)$  et  $(1 \ 1 \ -1)$ .

La matrice obtenue à partir de ces lignes vaut  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Il faut lui ajouter une ligne afin de la rendre carrée inversible. Pour cela, on place un 1 en seconde colonne sur la troisième ligne. Il ne reste plus qu'à inverser la matrice pour obtenir la base orthogonale pour  $Q$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.5 Interprétation matricielle

Le théorème précédent admet une interprétation matricielle dont l'énoncé ne fait pas référence à la théorie des formes quadratiques. Rappelons qu'une matrice est symétrique si elle est égale à sa transposée.

**Théorème 4** *Soit  $S$  une matrice symétrique. Alors il existe une matrice diagonale  $D$  dont les termes diagonaux appartiennent tous à  $\{-1,0,1\}$  et une matrice inversible  $P$  telles que*

$$S = {}^tPDP.$$

Démontrons ce résultat. Considérons la forme quadratique sur  $\mathbf{R}^n$  dont la matrice est donnée par  $S$ . Le théorème précédent donne une base  $(e_i)$  dans laquelle la forme quadratique a une matrice  $D$  diagonale, avec des coefficients diagonaux appartenant à  $\{-1,0,1\}$ . Notons  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(e_i)$ , c'est la matrice dont les lignes sont données par les formes linéaires  $l_i$ . D'après la formule de changement de base pour les formes quadratiques, nous avons  $S = {}^tPDP$ .

#### Exemples

Les exemples précédents donnent

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} &= {}^t \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= {}^t \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} &= {}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.6 Étude de la signature

Il reste à démontrer la proposition 8. La preuve repose sur le lemme suivant.

**Lemme 1** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $Q$  une forme quadratique de signature  $(p,q)$ . Supposons qu'il existe des sous-espaces vectoriels  $E_1, E_2$  de  $E$  tels que*

- $E_1 + E_2 = E$ ,
- $Q$  est définie positive en restriction à  $E_1$ ,
- $Q$  est négative en restriction à  $E_2$ .

Alors  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$  et  $p = \dim E_1$ .

**Preuve du lemme**

La forme quadratique  $Q$  est à la fois définie positive et négative sur  $E_1 \cap E_2$ . On a donc  $Q(x) > 0$  et  $Q(x) \leq 0$  pour tout vecteur  $x$  non nul dans cette intersection, ce qui montre qu'elle ne contient que le vecteur nul. Les sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe, on en déduit

$$\dim E_1 = \dim E - \dim E_2.$$

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  tel que  $Q$  soit définie positive en restriction à  $F$ . Là encore, la forme  $Q$  est définie positive et négative sur l'intersection  $F \cap E_2$ , qui est donc restreinte à  $\{0\}$ . Ceci permet de conclure :

$$\dim F \leq \dim E - \dim E_2 = \dim E_1.$$

Démontrons à partir de ce lemme qu'une forme quadratique de la forme

$$Q(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

est nécessairement de signature  $(p,q)$ . Pour cela, on remarque que  $Q$  est définie positive sur l'espace vectoriel  $E_1$  engendré par  $(e_1, \dots, e_p)$  et négative sur l'espace  $E_2$  engendré par  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ . Par le lemme, on voit que  $p$  correspond bien au premier coefficient de la signature. On applique le même raisonnement à la forme quadratique  $-Q$  qui a pour signature  $(q,p)$  afin de conclure.

Finalement, notons que la matrice de  $Q$  est diagonale. Les  $p$  premiers coefficients diagonaux sont égaux à un, les  $q$  suivants valent  $-1$  et les autres sont nuls. Une telle matrice a un noyau de dimension  $n - p - q$ . On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 5** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $Q$  une forme quadratique de signature  $(p,q)$ . Alors*

$$p + q = \text{rang}(Q), \quad p + q + \dim \ker(Q) = n.$$

**Méthode :** *calcul de la signature d'une forme quadratique*

Il suffit de réduire la forme quadratique et de compter le nombre de signes  $+$  et de signes  $-$  devant les carrés des formes linéaires apparaissant dans l'expression réduite. Il est crucial que ces formes linéaires soient indépendantes entre elles.

Il est parfois possible de déterminer la signature d'une forme quadratique sans utiliser l'algorithme de réduction de Gauss, en faisant appel au déterminant. La méthode est expliquée dans les compléments de ce chapitre.

## 4. Coniques et quadriques affines

### 4.1 Coniques

**Définition 18** Une conique  $\mathcal{C}$  est un sous-ensemble du plan composé des points dont les coordonnées  $(x,y) \in \mathbf{R}^2$  dans une certaine base satisfont une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

avec  $a, b, c, d, e$  et  $f$  des nombres réels tels que  $a, b$  et  $c$  ne soient pas tous les trois nuls.

Nous allons montrer qu'un changement de variables judicieux permet de simplifier l'équation de la conique.

**Proposition 10** Considérons une conique  $\mathcal{C}$ . Alors il existe un changement de variables affine de la forme

$$\begin{cases} X &= a_{1,1}x + a_{1,2}y + b_1 \\ Y &= a_{2,1}x + a_{2,2}y + b_2 \end{cases}$$

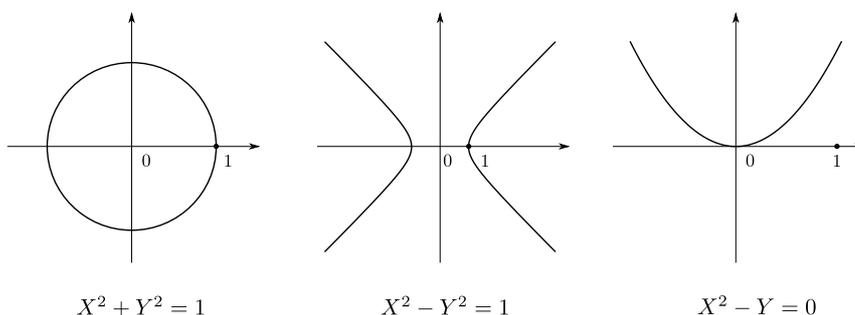
qui transforme l'expression de la conique en une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= 1 && \text{la conique est une ellipse,} \\ X^2 - Y^2 &= 1 && \text{la conique est une hyperbole,} \\ X^2 - Y &= 0 && \text{la conique est une parabole,} \end{aligned}$$

ou une des formes :

$$X^2 = 1, X^2 - Y^2 = 0, X^2 = 0, X^2 + Y^2 = 0, X^2 + Y^2 = -1, X^2 = -1,$$

auquel cas la conique est composée respectivement de deux droites parallèles, deux droites sécantes, une droite, un point ou est vide.



On peut déterminer de quelle conique il s'agit en regardant la signature de la forme quadratique  $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$  ou le discriminant associé  $\Delta = ac - \frac{b^2}{4}$ .

signature (2,0)  $\rightarrow$  ellipse ou point ou vide ( $\Delta > 0$ )

signature (1,1)  $\rightarrow$  hyperbole ou deux droites sécantes ( $\Delta < 0$ )

signature (1,0)  $\rightarrow$  parabole ou deux droites ou droite ou vide ( $\Delta = 0$ )

Pour distinguer, par exemple, entre une ellipse, un point et l'ensemble vide, il suffit d'exhiber au moins deux points appartenant à l'ellipse.

Le discriminant d'une forme quadratique est égal au déterminant de la matrice associée à la forme quadratique. Attention à ne pas le confondre avec le discriminant d'un polynôme. Le lien avec la signature sera expliqué en complément.

**Méthode :** réduction de l'équation d'une conique

– On effectue le changement de variable qui permet de réduire la forme quadratique  $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ .

– Quitte à intervertir les deux variables, l'équation de la conique prend une des trois formes suivantes :

$$x'^2 + y'^2 + \alpha x' + \beta y' + \gamma = 0 \quad \text{signature (2,0) ou (0,2)}$$

$$x'^2 - y'^2 + \alpha x' + \beta y' + \gamma = 0 \quad \text{signature (1,1)}$$

$$x'^2 + \alpha x' + \beta y' + \gamma = 0 \quad \text{signature (1,0) ou (0,1)}$$

Dans les deux premiers cas, on fait disparaître les termes de degré 1 en mettant les polynômes  $x'^2 + \alpha x'$  et  $\pm y'^2 + \beta y'$  sous forme canonique. De même pour  $x'$  dans le dernier cas. Il reste alors un terme ou bien constant auquel cas on prend  $Y = y'$ , ou bien de degré un en  $y'$  et on l'affecte à  $Y$ .

**Exemple**

– Déterminons la nature de la conique

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x + 10y + 4 = 0\}.$$

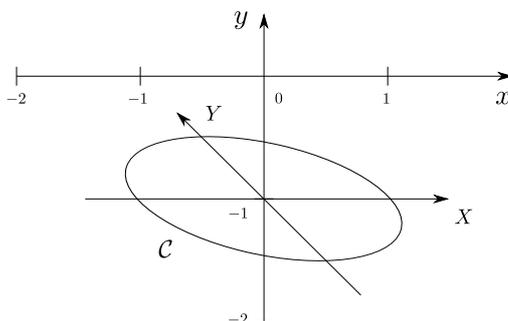
Par réduction,

$$\begin{aligned} x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x + 10y + 4 & \\ &= (x + y)^2 + (2y)^2 + 2x + 10y + 4 \\ &= x'^2 + y'^2 + 2x' + 4y' + 4 \\ &= x'^2 + 2x' + y'^2 + 4y' + 4 \\ &= (x' + 1)^2 + (y' + 2)^2 - 1 = X^2 + Y^2 - 1 \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} X = x' + 1 = x + y + 1 \\ Y = y' + 2 = 2y + 2 \end{cases}$$

La conique est une ellipse centrée au point de coordonnées  $X = 0, Y = 0$  ou  $x = 0, y = -1$ .



– Pour la conique  $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2xy + 2y + 2x - 3 = 0\}$ ,

$$x^2 + 2xy + 2y + 2x - 3$$

$$= (x + y)^2 - y^2 + 2y + 2x - 3$$

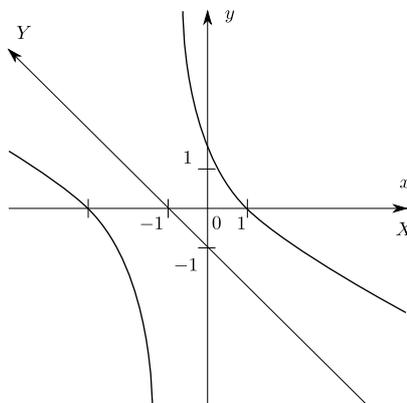
$$= x'^2 - y'^2 + 2y + 2x - 3$$

$$= x'^2 + 2x' - y'^2 - 3$$

$$= (x' + 1)^2 - y'^2 - 4 = 4(X^2 - Y^2 - 1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}, \quad \begin{cases} X = \frac{1}{2}(x' + 1) = \frac{1}{2}(x + y + 1) \\ Y = \frac{1}{2}y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

La conique est une hyperbole.



## 4.2 Quadriques

La même méthode fonctionne en toute dimension. Traitons le cas de la dimension 3.

**Définition 19** Une quadrique  $\mathcal{Q}$  est un sous-ensemble de l'espace composé des points dont les coordonnées  $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$  dans une certaine base satisfont une équation de la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

avec des coefficients réels tels que  $a, b, c, d, e$  et  $f$  ne soient pas tous nuls.

La méthode précédente donne le résultat suivant.

**Proposition 11** *Considérons une quadrique  $\mathcal{Q} \subset \mathbf{R}^3$ . Alors il existe un changement de variables affine de la forme*

$$\begin{cases} X &= a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z + b_1 \\ Y &= a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z + b_2 \\ Z &= a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z + b_3 \end{cases}$$

qui transforme l'expression de la quadrique en une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1 && \text{ellipsoïde,} \\ X^2 + Y^2 - Z^2 &= 1 && \text{hyperboloïde à une nappe,} \\ X^2 - Y^2 - Z^2 &= 1 && \text{hyperboloïde à deux nappes,} \\ X^2 + Y^2 - Z^2 &= 0 && \text{cône,} \\ X^2 + Y^2 - Z &= 0 && \text{paraboloïde elliptique,} \\ X^2 - Y^2 - Z &= 0 && \text{paraboloïde hyperbolique,} \end{aligned}$$

ou une des formes suivantes, qui correspondent au cas où la quadrique est le produit d'une conique par une droite :

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= 1 && \text{cylindre elliptique,} \\ X^2 - Y^2 &= 1 && \text{cylindre hyperbolique,} \\ X^2 - Y &= 0 && \text{cylindre parabolique,} \end{aligned}$$

ou enfin une des formes suivantes :

$$X^2 = 1, X^2 - Y^2 = 0, X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, X^2 + Y^2 = 0, X^2 = 0,$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = -1, X^2 + Y^2 = -1, X^2 = -1,$$

auquel cas la quadrique correspond à deux plans parallèles, deux plans sécants, un point, une droite, un plan ou est vide.

Là encore, on peut s'aider de la signature de la forme quadratique

$$Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

pour déterminer la nature de la quadrique.

signature (3,0)  $\rightarrow$  ellipsoïde, point ou vide ;

signature (2,1)  $\rightarrow$  hyperboloïde à une ou deux nappes, cône ;

signature (2,0)  $\rightarrow$  paraboloïde ou cylindre elliptique, droite, vide ;

signature (1,1)  $\rightarrow$  paraboloïde ou cylindre hyperbolique, deux plans sécants ;

signature (1,0)  $\rightarrow$  cylindre parabolique, deux plans parallèles, plan, vide.

**Exemple**

On considère la quadrique  $\mathcal{Q}$  de  $\mathbf{R}^3$  donnée par

$$\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10z = 0\}.$$

Déterminons la nature de cette quadrique. La réduction donne

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10z & \\ &= (x + 2y)^2 - (y - 2z)^2 + 5z^2 - 10z \\ &= (x + 2y)^2 - (y - 2z)^2 + 5(z - 1)^2 - 5 \\ &= (x + 2y)^2 - (y - 2z)^2 + 5(z - 1)^2 - 5 \\ &= 5 \left( \frac{1}{5}(x + 2y)^2 - \frac{1}{5}(y - 2z)^2 + (z - 1)^2 - 1 \right) \\ &= 5 \left( \left( \frac{x + 2y}{\sqrt{5}} \right)^2 - \left( \frac{y - 2z}{\sqrt{5}} \right)^2 + (z - 1)^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

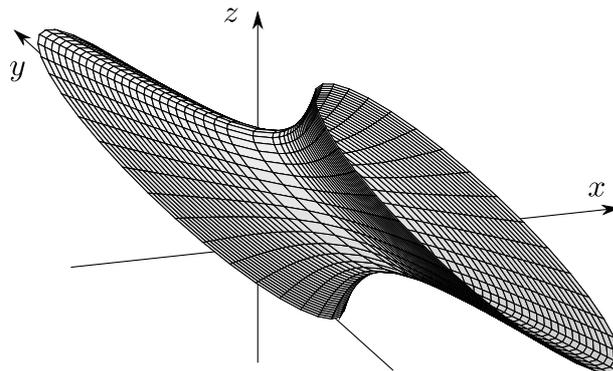
On pose donc

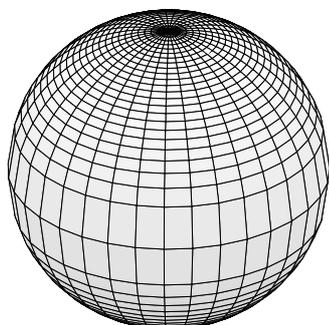
$$\begin{cases} X &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \\ Y &= z - 1 \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{5}}(y - 2z) \end{cases}$$

et l'équation devient

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1.$$

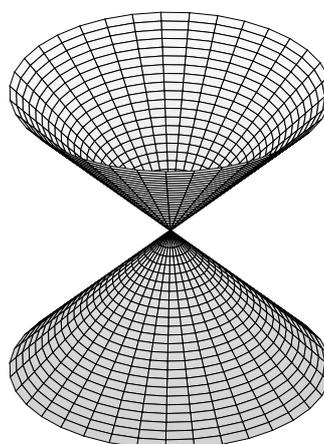
La quadrique  $\mathcal{Q}$  est un hyperboloïde à une nappe.





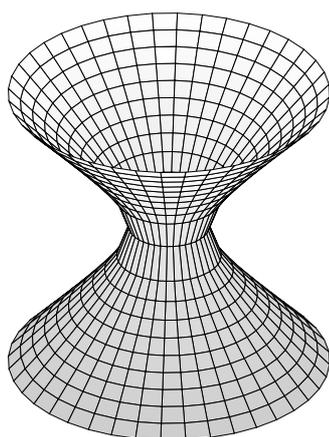
Sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$



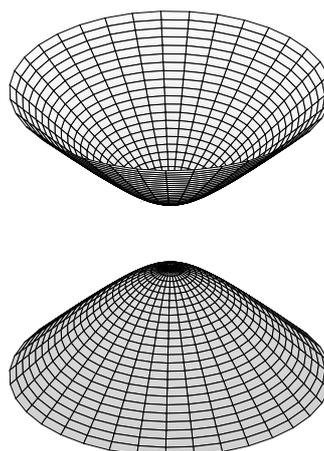
Cône

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$$



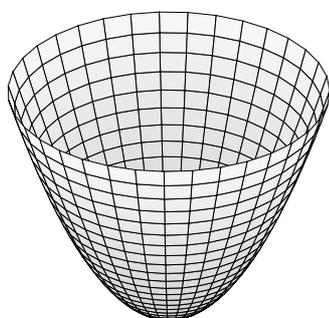
Hyperboloïde à une nappe

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$$



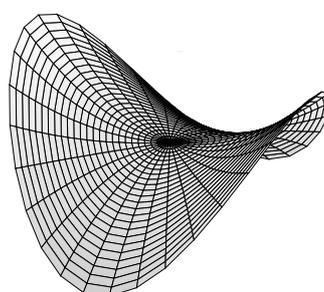
Hyperboloïde à deux nappes

$$X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$$



Paraboloïde elliptique

$$X^2 + Y^2 - Z = 0$$



Paraboloïde hyperbolique

$$X^2 - Y^2 - Z = 0$$

## 5. Compléments

### 5.1 Forme quadratique et déterminant

Rappelons qu'une forme quadratique est dite non dégénérée si son noyau est nul. De manière équivalente, le déterminant de sa matrice calculée dans une base quelconque est non nul.

En général, le déterminant de la matrice associée à une forme quadratique dépend de la base choisie pour la calculer. Rappelons que les matrices  $B$  et  $B'$  dans deux bases différentes  $(e_i)$  et  $(e'_i)$  sont reliées par la formule

$$B' = {}^t P B P.$$

On a donc

$$\det(B') = \det({}^t P) \det(B) \det(P) = \det(P)^2 \det(B)$$

et les deux déterminants sont différents en général. On note tout de même qu'ils ont même signe. Le signe du déterminant de la matrice associée à une forme quadratique ne dépend pas de la base choisie pour exprimer cette matrice.

Examinons comment ce signe est relié à la signature  $(p,q)$  de la forme quadratique  $Q$  en se plaçant dans une base orthogonale pour  $Q$ . Dans une telle base, la matrice de  $Q$  possède  $p$  coefficients strictement positifs et  $q$  coefficients négatifs. Le déterminant est égal au produit de ces coefficients. On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 12** *Une forme quadratique de signature  $(p,q)$  est non dégénérée si et seulement si le déterminant de sa matrice est non nul. Dans ce cas, le signe de ce déterminant est strictement négatif si et seulement si  $q$  est impair.*

On en déduit des informations importantes sur la signature en petite dimension. Par exemple, en dimension 2, si le déterminant de la matrice d'une forme quadratique dans une certaine base est strictement négatif, la signature vaut nécessairement  $(1,1)$  et s'il est strictement positif, elle vaut  $(2,0)$  ou  $(0,2)$ .

On distingue entre ces deux derniers cas en regardant les coefficients diagonaux de la matrice de  $Q$ . Ces coefficients correspondent aux valeurs que prend  $Q$  sur les vecteurs de la base dans laquelle sa matrice est calculée. Si  $Q$  a pour signature  $(2,0)$ , ils sont tous strictement positifs. On en déduit :

**Proposition 13** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 2,  $Q$  une forme quadratique non dégénérée définie sur  $E$  et  $B = \{b_{i,j}\}$  sa matrice dans une base de  $E$ . Alors la signature de  $Q$  vaut*

- $(1,1)$  si  $\det(B) < 0$ ,
- $(2,0)$  si  $\det(B) > 0$  et  $b_{1,1} > 0$ ,
- $(0,2)$  si  $\det(B) > 0$  et  $b_{1,1} < 0$ .

## 5.2 Classification des formes quadratiques

Les théorèmes précédents peuvent se formuler sous forme d'un résultat de classification. Introduisons une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes quadratiques définies sur un espace donné.

**Proposition 14** *Deux formes quadratiques  $Q$  et  $Q'$  définies sur un sous-espace vectoriel  $E$  sont dites équivalentes s'il existe une application linéaire inversible  $f : E \rightarrow E$  telle que*

$$Q'(x) = Q(f(x)) \text{ pour tout } x \in E.$$

Deux formes quadratiques équivalentes ont même signature car l'application  $f$  met en bijection les espaces sur lesquelles les deux formes sont définies positives ou définies négatives. On va montrer la réciproque.

**Théorème 5** *Deux formes quadratiques définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.*

Ce résultat est appelé théorème d'inertie de Sylvester.

### Preuve

Soit  $Q$  et  $Q'$  deux formes quadratiques ayant même signature. On a vu qu'il existe deux bases  $(e_i)$  et  $(e'_i)$  telles que

$$Q(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2,$$

$$Q'(x_1e'_1 + \dots + x_n e'_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Notons  $f$  l'application qui envoie la base  $(e_i)$  sur la base  $(e'_i)$  et posons  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ . On a alors  $f(x) = x_1e'_1 + \dots + x_n e'_n$ , ce qui implique

$$Q'(f(x)) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = Q(x).$$

C'est l'égalité désirée.

Comme application, donnons la classification des formes quadratiques définies sur un espace de dimension deux. Il suffit d'énumérer les valeurs possibles pour la signature  $(p,q)$  et de donner un exemple de forme quadratique pour chacune de ces valeurs.

**Proposition 15** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension deux et  $Q$  une forme quadratique sur  $E$ . Alors il existe une base  $(e_1, e_2)$  de  $E$  dans laquelle  $Q$  prend l'une des formes suivantes :*

- $Q(x_1e_1 + x_2e_2) = 0$  *signature* (0,0)
- $Q(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1^2$  *signature* (1,0)
- $Q(x_1e_1 + x_2e_2) = -x_1^2$  *signature* (0,1)
- $Q(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1^2 + x_2^2$  *signature* (2,0)
- $Q(x_1e_1 + x_2e_2) = -x_1^2 - x_2^2$  *signature* (0,2)
- $Q(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1^2 - x_2^2$  *signature* (1,1)



## Chapitre 3

# Espaces euclidiens

Nous étudions dans ce chapitre la notion d'espace euclidien, en nous appuyant sur les résultats généraux concernant les formes quadratiques vus au chapitre précédent. Une fois introduite la notion de produit scalaire, nous montrons comment il intervient en géométrie plane avant de généraliser les concepts d'aire, longueur et angle à des espaces euclidiens de dimension quelconque. On étudie ensuite la notion d'orthogonalité et les transformations de l'espace euclidien associées, projections orthogonales et isométries.

### 1. Produit scalaire

#### 1.1 Définition d'un produit scalaire

**Définition 20** *Un produit scalaire défini sur un espace vectoriel est la donnée d'une forme bilinéaire symétrique sur cet espace dont la forme quadratique associée est définie positive.*

*Un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Il est d'usage d'employer une notation particulière pour le produit scalaire de deux vecteurs  $x, y \in E$  :  $\langle x, y \rangle$ ,  $(x | y)$  où  $\langle x | y \rangle$ . On pose également

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

La quantité  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est la *norme euclidienne* du vecteur  $x$ .

#### Exemples

- L'espace  $\mathbf{R}^n$  muni du produit scalaire usuel est bien sûr un espace euclidien.
- L'espace  $C^0([0,1], \mathbf{R})$  muni de la forme bilinéaire symétrique

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

est un espace euclidien. Il n'est pas de dimension finie.

Lorsque l'espace est de dimension finie, on peut trouver une base orthogonale en vertu du théorème 9. Comme le produit scalaire est défini positif,

on peut diviser chacun des vecteurs de cette base par sa norme euclidienne de manière à ce qu'ils soient tous de norme un.

**Proposition 16** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension finie  $n$ . Alors il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  qui vérifie

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ pour tout } i, j \text{ distincts, } \|e_i\| = 1 \text{ pour tout } i.$$

Une telle base est dite orthonormée. Dans cette base, tout vecteur  $x \in E$  a pour coefficients  $x_i = \langle x, e_i \rangle$ ,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n,$$

le produit scalaire et la forme quadratique sont de la forme

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Grâce aux formules précédentes, on peut exprimer les coefficients de la matrice associée à une application linéaire  $f : E \rightarrow E$  dans une base orthonormée  $(e_i)$  à l'aide produit scalaire. Ces coefficients sont les coordonnées des vecteurs  $f(e_j)$  dans la base  $(e_i)$ . La matrice de  $f$  est donc égale à  $\{\langle e_i, f(e_j) \rangle\}_{i,j}$ .

## 1.2 Norme euclidienne

Vérifions que la fonction  $x \mapsto \|x\|$  est bien une norme, ce qui signifie qu'elle satisfait les propriétés suivantes.

**Proposition 17** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Alors

- pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $x \in E$ ,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
- pour tout  $x, y \in E$ ,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , (inégalité triangulaire)
- pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

La démonstration de l'inégalité triangulaire repose sur l'inégalité suivante, attribuée à Augustin Louis Cauchy (1789-1857) et Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).

**Théorème 6 (inégalité de Cauchy-Schwarz)** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x, y \in E$ . Alors

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont proportionnels entre eux.

**Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

Si  $x$  et  $y$  sont proportionnels entre eux, par exemple  $x = \lambda y$ , les deux termes de l'inégalité valent  $\lambda \|x\|^2$ . Sinon,  $x$  et  $y$  engendrent un plan vectoriel  $\text{vect}(x,y)$ , en restriction duquel la matrice du produit scalaire est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle \end{pmatrix}.$$

Choisissons une base orthonormée de  $\text{vect}(x,y)$ . On a vu que la matrice  $B$  est de la forme  ${}^t P P$ , où  $P$  est la matrice de passage de cette base orthonormée à la base  $(x,y)$ . On a donc

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x,y \rangle^2 = \det(B) = \det(P)^2 > 0.$$

**Exemples**

– Appliquons l'inégalité au deux vecteurs  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$  de  $\mathbf{R}^2$  muni du produit scalaire usuel. On obtient

$$|x_1 x_2 + y_1 y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

– Appliquons l'inégalité à deux fonctions continues  $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ , en utilisant le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ . On obtient

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 g(t)^2 dt}.$$

**Preuve de l'inégalité triangulaire**

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Revenons sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On voit que même si cette inégalité est vraie dans tout espace euclidien, c'est avant tout un résultat de géométrie plane. On va en donner une interprétation en terme d'aire.

**1.3 Aire, longueur et angle**

**Définition 21** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x, y \in E$ . Soit  $(e_1, e_2)$  une base orthonormée de  $\text{vect}(x,y)$  et  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans cette base. L'aire du parallélogramme de côtés  $x$  et  $y$  est définie par

$$\text{aire}(x,y) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|,$$

elle ne dépend pas de la base orthonormée  $(e_1, e_2)$  utilisée pour la calculer.

Cette aire est égale à la valeur absolue du déterminant de la matrice  $P$  considérée dans la preuve du théorème précédent. De fait,  $P$  est la matrice de passage de la base  $(e_1, e_2)$  à la base  $(x, y)$ , elle s'écrit donc

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

La formule vue plus haut,  $\det(B) = \det(P)^2$ , devient

**Proposition 18** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x, y \in E$ . Alors*

$$\langle x, y \rangle^2 + \text{aire}(x, y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Cette formule montre que l'aire est indépendante de la base orthonormée choisie pour la calculer. Par contre, le signe du déterminant  $\det(P) = x_1 y_2 - x_2 y_1$  dépend de cette base. Cela nous amènera à introduire la notion d'espace vectoriel euclidien orienté.

### Exemple

Considérons deux vecteurs  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$  de  $\mathbf{R}^2$  muni du produit scalaire usuel. La proposition entraîne l'égalité

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

Cette formule s'appelle *identité de Lagrange*. On peut la démontrer directement en développant les carrés.

**Méthode :** *calcul de l'aire d'un parallélogramme de  $\mathbf{R}^n$*

Pour calculer l'aire du parallélogramme dont les côtés sont donnés par deux vecteurs  $x, y$  de  $\mathbf{R}^n$ , on pourrait construire une base orthogonale du plan  $\text{vect}(x, y)$  comme expliqué au précédent chapitre, exprimer  $x$  et  $y$  dans cette base et calculer un déterminant. Il est plus rapide d'utiliser la formule précédente.

### Exemple

– Calculons l'aire du parallélogramme de  $\mathbf{R}^3$  dont les côtés sont donnés par  $x = (1, 1, 0)$  et  $y = (0, 1, 1)$ .

$$\|x\|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2, \quad \|y\|^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2, \quad \langle x, y \rangle = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1,$$

d'où  $\text{aire}(x, y) = \sqrt{2 + 2 - 1^2} = \sqrt{3}$ .

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que pour tous vecteurs  $x, y \in E$ , le réel  $\langle x, y \rangle / \|x\| \|y\|$  est compris entre  $-1$  et  $1$ . Rappelons que pour tout réel  $a$  compris entre  $[-1, 1]$ , il existe un unique nombre réel  $\theta \in [0, \pi]$  tel que  $a = \cos(\theta)$ . Ceci permet de définir l'angle non orienté de deux vecteurs de la façon suivante.

**Définition 22 (angles non orientés)** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x, y \in E$  non nuls. La mesure de l'angle non orienté défini par la paire  $\{x, y\}$  est l'unique  $\theta \in [0, \pi]$  satisfaisant*

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta).$$

**Méthode :** *calculs d'angles et de produits scalaires*

Pour calculer l'angle non orienté de deux vecteurs dont les coordonnées dans une base orthonormée sont données, on calcule leur norme, leur produit scalaire et on fait appel à la fonction inverse du cosinus, qu'on note *acos* dans la suite. Réciproquement, on peut calculer le produit scalaire de deux vecteurs si on connaît leurs normes et leur angle.

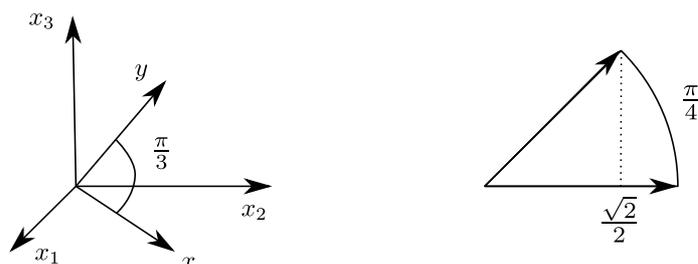
**Exemples**

– Reprenons les deux vecteurs  $x = (1,1,0)$  et  $y = (0,1,1) \in \mathbf{R}^3$ . Nous avons montré que  $\|x\|^2 = 2$ ,  $\|y\|^2 = 2$ ,  $\langle x,y \rangle = 1$ . La mesure de l'angle non orienté entre  $x$  et  $y$  est donc donnée par

$$\operatorname{acos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

– Considérons deux vecteurs  $x, y$  de norme un et faisant un angle égal à  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\langle x,y \rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



On termine par quelques formules concernant les parallélogrammes et les triangles d'un espace euclidien.

**Proposition 19** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x, y \in E$ . Alors*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (\text{formule du parallélogramme})$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 \quad (\text{formule de la médiane})$$

Pour interpréter géométriquement la première de ces formules, on considère un parallélogramme de sommets  $A, B, C$  et  $D$  situés dans un même plan et on prend pour  $x$  le vecteur allant de  $A$  à  $B$ , pour  $y$  le vecteur allant de  $A$  à  $D$ . On obtient

$$2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

La somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales.

Pour la seconde formule, on considère un triangle de sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  et on note  $I$  le milieu de  $BC$ .

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2.$$

Cette formule exprime le carré de la longueur de la médiane du triangle en fonction des carrés des côtés du triangle. Elle remonte à Thalès de Milet (-625 -547).



### Preuve de la formule du parallélogramme

Il suffit de développer les carrés dans le premier terme.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Donnons enfin un analogue multidimensionnel du théorème de Pythagore.

**Théorème 7 (de Pythagore)** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $E$  orthogonaux deux à deux :  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  pour tout  $i, j$  distincts. Alors

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

### Preuve

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \left\langle \sum_i v_i, \sum_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j} \langle v_i, v_j \rangle = \sum_i \|v_i\|^2.$$

## 1.4 Espace euclidien orienté

### Orientation d'un espace euclidien

**Définition 23** On se place dans un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimension finie. Nous dirons que deux bases  $(e_i)$  et  $(e'_i)$  ont même orientation si la matrice de passage de l'une à l'autre base est de déterminant strictement positif. S'il est au contraire négatif, nous dirons que les bases ont des orientations opposées.

Orienter un espace euclidien de dimension finie consiste à choisir une base qu'on dit orientée positivement, ou encore de manière directe. Toutes

les bases ayant même orientation que la base choisie sont dites orientées positivement. Les autres sont dites orientées négativement, de manière indirecte, ou encore dans le sens rétrograde. Deux bases orientées de manière indirecte ont même orientation, en vertu des formules de changement de base.

Une application inversible définie d'un espace euclidien orienté dans lui-même *présERVE l'orientation* si une base et son image ont même orientation. On verra plus loin comment caractériser cette propriété en terme de déterminant.

### Exemples

- L'espace  $\mathbf{R}^n$  possède une orientation canonique donnée par la base canonique.
- Un plan de  $\mathbf{R}^3$  hérite d'une structure euclidienne obtenue par restriction du produit scalaire usuel de  $\mathbf{R}^3$  mais il ne possède pas d'orientation donnée a priori. Se donner une orientation d'un tel plan revient à choisir un vecteur  $e_3$  de norme un orthogonal au plan. Une base  $(e_1, e_2)$  du plan est considérée comme directe si  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base directe de  $\mathbf{R}^3$  muni de son orientation canonique. Il existe deux choix possibles pour le vecteur  $e_3$ , chacun correspondant à une orientation différente.

#### *Déterminant d'une famille de $n$ vecteurs*

La notion d'espace euclidien orienté de dimension  $n$  permet de définir le déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$ . Il s'agit du déterminant de la matrice dont les colonnes sont données par les coordonnées des  $v_i$  dans une base orthonormée directe. On démontrera dans la suite qu'il ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie.

#### *Angles orientés dans le plan*

Une autre application de la notion d'orientation est celle d'angle orienté. On se place dans un espace  $E$  euclidien orienté de dimension deux. Nous avons vu précédemment que pour tout  $x, y \in E$  non nuls,

$$\left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)^2 + \left( \frac{\det(x, y)}{\|x\| \|y\|} \right)^2 = 1.$$

Rappelons que pour tous réels  $a, b$  satisfaisant  $a^2 + b^2$ , on peut trouver un réel  $\theta$ , unique à un multiple de  $2\pi$  près, tel que  $a = \cos(\theta)$  et  $b = \sin(\theta)$ .

**Définition 24 (angles orientés)** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien orienté de dimension deux et  $x, y$  deux vecteurs de  $E$  non nuls. La mesure de l'angle orienté défini par le couple  $(x, y)$  est l'unique  $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  satisfaisant*

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta),$$

$$\det(x, y) = \|x\| \|y\| \sin(\theta),$$

*le déterminant étant calculé dans une base orthonormée orientée de  $E$ .*

**Exemple**

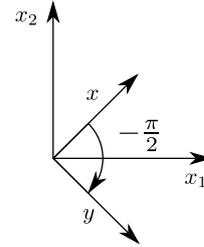
Plaçons nous dans  $\mathbf{R}^2$  muni de son orientation canonique et considérons les vecteurs  $x = (1,1)$  et  $y = (1, -1)$ . Nous avons

$$\|x\|^2 = 2, \|y\|^2 = 2, \langle x,y \rangle = 0, \det(x,y) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2.$$

La mesure  $\theta$  de l'angle orienté formé par ces deux vecteurs vérifie

$$\cos(\theta) = 0/2 = 0, \quad \sin(\theta) = -2/2 = -1,$$

ce qui implique  $\theta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ .

**2. Orthogonalité**

On a introduit précédemment le concept de base orthonormée. On va étudier plus en détail la notion d'orthogonalité dans un espace euclidien.

**2.1 Projection orthogonale**

Commençons par introduire la notion d'espace orthogonal à un sous-espace donné avant de définir la projection orthogonale sur un sous-espace.

**Définition 25** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'orthogonal de  $F$  est le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de  $F$  :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x,y \rangle = 0\}$$

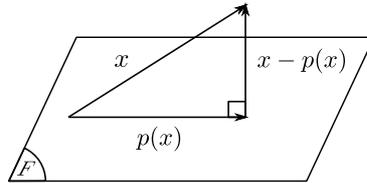
Un vecteur à la fois dans  $F$  et  $F^\perp$  est orthogonal à lui-même, il est donc nul. On en déduit que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ .

**Proposition 20** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Alors pour tout  $x \in E$ , il existe un unique vecteur  $p(x)$  qui satisfait les deux conditions suivantes :

- $p(x) \in F$ ,
- $x - p(x) \in F^\perp$ .

Le vecteur  $p(x)$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ . Soit  $(e_i)$  une base orthonormée de  $F$ , alors

$$p(x) = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n.$$

**Preuve**

La somme  $\sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$  satisfait les deux propriétés voulues : elle est dans  $F$  et pour tout  $j$ ,

$$\langle x - \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

Soit  $y, y'$  des vecteurs tels que  $y, y' \in F$  et  $x - y, x - y' \in F^\perp$ . La différence  $y - y' = (x - y') - (x - y)$  est à la fois dans  $F$  et dans  $F^\perp$ , elle est donc nulle.

**Méthode :** calcul du projecteur orthogonal sur un sous-espace

Il suffit de calculer une base orthonormée  $(e_i)$  de ce sous-espace et d'utiliser la formule  $p(x) = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$ .

Remarquons que l'application  $x \mapsto p(x)$  est linéaire. Posons

$$x_1 = p(x) \in F, \quad x_2 = x - p(x) \in F^\perp.$$

De manière remarquable, le vecteur  $x_2$  est dans  $F^\perp$  et vérifie  $x - x_2 \in F$ . Cela montre l'existence de la projection orthogonale de  $x$  sur  $F^\perp$ , donnée par  $x - p(x)$ . On a montré le résultat suivant.

**Corollaire 6** *Tout  $x \in E$  s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in F \text{ et } x_2 \in F^\perp.$$

*On dit que  $E$  est la somme directe de  $F$  et  $F^\perp$  et on note*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

*La projection orthogonale sur  $F$  est l'unique application linéaire  $p : E \rightarrow E$  satisfaisant*

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x, \quad \forall x \in F^\perp, \quad p(x) = 0.$$

Rappelons que la dimension de deux sous-espaces en somme directe est égale à la somme de leurs dimensions. De plus, on a toujours l'inclusion  $F \subset (F^\perp)^\perp$ . Si  $E$  est de dimension finie, le corollaire précédent montre que ces deux espaces ont même dimension. Ils sont donc égaux.

**Corollaire 7** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors*

- $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ ,
- $F = (F^\perp)^\perp$ .

**Exemple**

Considérons un hyperplan  $H = \{x \in \mathbf{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ . Posons  $v = (a_1, \dots, a_n)$ . Alors  $H$  est l'orthogonal de  $\text{vect}(v)$  :

$$\text{vect}(v)^\perp = H, \quad H^\perp = \text{vect}(v).$$

Une base orthonormée de  $\text{vect}(v)$  est donnée par le singleton  $(v/\|v\|)$ . La projection sur  $\text{vect}(v)$  vaut donc

$$p(x) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v = \frac{\sum a_k x_k}{\sum a_k^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

La matrice de  $p$  a pour coefficients  $\left\{ \frac{a_i a_j}{\sum a_k^2} \right\}$ , elle est donnée par

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonale sur  $H$  a pour expression

$$p_H(x) = x - \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

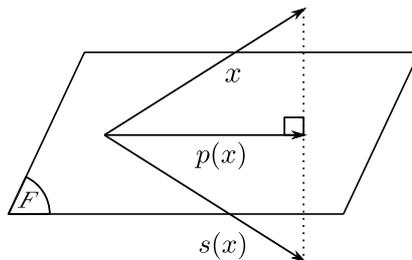
Terminons par une notion reliée à celle de projection orthogonale.

**Définition 26** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $F$  un sous-espace de  $E$  de dimension finie. La symétrie orthogonale relativement à  $F$  est l'unique application linéaire  $s : E \rightarrow E$  telle que

$$\forall x \in F, \quad s(x) = x, \quad \forall x \in F^\perp, \quad s(x) = -x.$$

Lorsque  $F$  est un hyperplan, on parle de réflexion orthogonale. Notons  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors

$$s(x) = 2p(x) - x.$$



**Exemples**

– La symétrie relativement au sous-espace  $\{0\}$  est appelée *symétrie centrale*. Elle est donnée par  $s(x) = -x$  pour tout  $x$ . La symétrie par rapport à  $E$  est égale à l'identité.

– La réflexion orthogonale relativement à un hyperplan  $H = \text{vect}(v)^\perp$  est donnée par l'expression

$$s(x) = x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

– La symétrie orthogonale par rapport à une droite  $\text{vect}(v)$  est donnée par

$$s(x) = 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v - x.$$

En dimension 3, une symétrie orthogonale relativement à une droite est appelée un *demi-tour*.

**2.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$ . Nous avons vu dans le chapitre portant sur les formes quadratiques (page 36) comment trouver une base orthogonale pour la forme  $\varphi$ .

– On commence par réduire la forme quadratique  $Q$  associée à  $\varphi$ . On obtient des formes linéaires  $l_1, \dots, l_{p+q}$  linéairement indépendantes telles que

$$Q = \sum \pm l_i^2.$$

– On complète la famille  $(l_i)$  en une base de  $E^*$  et on construit une base  $(e_i)$  de telle sorte que la base  $(l_i)$  soit duale à celle-ci.

Cette méthode générale est assez longue à mettre en œuvre. Dans le cas d'un produit scalaire, il existe un procédé plus rapide attribué à Jørgen Pedersen Gram (1850-1916) et Erhard Schmidt (1876-1959) mais qu'on trouve déjà dans les travaux de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

**Méthode :** *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

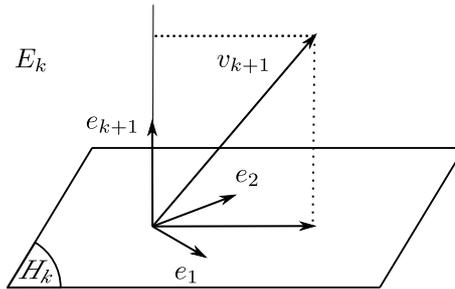
On part d'une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  et on cherche à construire par récurrence une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de façon à ce que les vecteurs  $(v_1, \dots, v_k)$  et  $(e_1, \dots, e_k)$  engendrent le même espace vectoriel pour tout  $k$  allant de 1 à  $n$ .

Dans ce cas,  $v_1$  et  $e_1$  sont nécessairement proportionnels et  $e_1$  doit être de norme un, ce qui laisse une seule possibilité si on suppose  $\langle e_1, v_1 \rangle > 0$ :

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Supposons construits  $(e_1, \dots, e_k)$  et construisons  $e_{k+1}$ . Ce doit être un vecteur de norme un appartenant à  $E_k = \text{vect}(e_1, \dots, e_k, v_{k+1})$  orthogonal à l'espace  $H_k = \text{vect}(e_1, \dots, e_k)$ . Il s'agit donc de projeter un vecteur de l'espace  $E_k$  sur l'orthogonal  $H_k^\perp$  à l'hyperplan  $H_k \subset E_k$  (vu page 57) et de le normaliser.

$$e_{k+1} = \frac{v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i}{\|v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i\|}.$$



**Théorème 8 (orthonormalisation de Gram-Schmidt)** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension finie et  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une unique base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que, pour tout entier  $i$  entre 1 et  $n$ ,

- $\text{vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{vect}(v_1, \dots, v_i)$ ,
- $\langle e_i, v_i \rangle > 0$ .

### Exemple

Comparons les deux méthodes sur un exemple. On se place sur  $\mathbf{R}^2$  et on prend  $v_1 = (3, 4)$  et  $v_2 = (4, 3)$ . Nous avons

$$\|v_1\| = 5, \quad \|v_2\| = 5, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 24.$$

On obtient par la première méthode

$$\begin{aligned} Q(x_1 v_1 + x_2 v_2) &= 25x_1^2 + 25x_2^2 + 48x_1 x_2 \\ &= 25 \left( x_1 + \frac{24}{25} x_2 \right)^2 + \frac{49}{25} x_2^2 \\ &= l_1(x_1, x_2)^2 + l_2(x_1, x_2)^2. \end{aligned}$$

avec  $l_1(x_1, x_2) = 5x_1 + \frac{24}{5} x_2$  et  $l_2(x_1, x_2) = \frac{7}{5} x_2$ .

$$\begin{pmatrix} 5 & \frac{24}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{24}{5} \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées obtenues sont celles d'une base orthogonale  $(e_1, e_2)$  dans la base  $(v_1, v_2)$ .

$$e_1 = \frac{1}{5} v_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \frac{1}{35}(-24v_1 + 25v_2) = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -24 \times 3 + 25 \times 4 \\ -24 \times 4 + 25 \times 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 28 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Le procédé de Gram-Schmidt donne

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1}{\|v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1\|} = \frac{1}{\|\dots\|} \begin{pmatrix} 4 - 24/5 \times 3/5 \\ 3 - 24/5 \times 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 28 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Ce procédé nécessite moins de calculs. Sans surprise, les deux méthodes conduisent au même résultat. Dans le cas défini positif, l'algorithme général produit un système triangulaire, qui doit coïncider aux signes près avec le résultat obtenu par le procédé de Gram-Schmidt.

### 3. Isométries

#### 3.1 Définition d'une isométrie

**Définition 27** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Une application linéaire  $f : E \rightarrow E$  est une isométrie de  $E$  si elle préserve le produit scalaire :

$$\text{Pour tout } x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Grâce aux identités de polarisation, on vérifie qu'une application linéaire est une isométrie si et seulement si elle préserve la norme :

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in E.$$

#### Exemples

- L'identité est une isométrie.
- Les symétries orthogonales sont des isométries. De fait une symétrie orthogonale  $s$  est de la forme  $s(x) = p(x) - (x - p(x))$  avec  $x$  et  $x - p(x)$  deux vecteurs orthogonaux de somme égale à  $x$ , si bien que

$$\|s(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|(x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Remarquons qu'une isométrie a un noyau réduit au vecteur nul. En effet, si  $f(x) = 0$  alors  $\|x\| = \|f(x)\| = 0$ . En dimension finie, cela implique qu'une isométrie est inversible.

De plus, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée, il en va de même de son image  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  car les produits scalaires des vecteurs  $e_i, e_j$  sont préservés par  $f$ . Cette propriété caractérise les isométries.

**Proposition 21** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension finie muni d'une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire. Alors  $f$  est une isométrie si et seulement si l'image  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  de cette base orthonormée est une base orthonormée.

**Preuve**

Soit  $x = \sum x_i e_i$  et  $y = \sum y_j e_j \in E$ . Si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est orthogonale,

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \sum_i x_i y_i = \langle x, y \rangle.$$

### 3.2 Groupe orthogonal

La matrice d'une isométrie exprimée dans une base orthonormée a une forme particulière. Voici comment la décrire.

**Définition 28** Une matrice  $P$  de taille  $n \times n$  est dite orthogonale si elle vérifie l'égalité

$${}^t P P = id.$$

L'ensemble des matrices orthogonales est appelé groupe orthogonal et noté

$$O_n(\mathbf{R}) = \{P \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^t P P = id\}.$$

Le groupe spécial orthogonal est composé des matrices orthogonales de déterminant 1.

$$SO_n(\mathbf{R}) = \{P \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^t P P = id, \det(P) = 1\}.$$

Remarquons qu'une matrice orthogonale a nécessairement un déterminant égal à  $\pm 1$  :

$$\det(P)^2 = \det({}^t P P) = \det(id) = 1.$$

Les matrices orthogonales de déterminant 1 sont celles qui préservent l'orientation canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

**Méthode :** caractérisation des matrices orthogonales

Pour montrer qu'une matrice est orthogonale, il suffit de vérifier que ses colonnes sont de norme un et orthogonales entre elles. En effet, le coefficient  $i, j$  de la matrice  ${}^t P P$  est obtenu en faisant le produit scalaire de la colonne  $i$  de  $P$  par sa colonne  $j$ . Cette matrice est égale à l'identité si et seulement si ses colonnes forment une famille orthonormée de  $\mathbf{R}^n$ .

**Exemple**

La matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est orthogonale de déterminant un. C'est un élément de  $SO_2(\mathbf{R})$ . La transformation de  $\mathbf{R}^2$  associée est appelée *rotation d'angle  $\theta$* .

**Proposition 22** *Considérons un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimension finie, une isométrie  $f : E \rightarrow E$  et une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Alors  $f$  est une isométrie si et seulement si sa matrice dans la base  $(e_i)$  est orthogonale.*

**Preuve**

Les colonnes de la matrice de  $f$  sont données par les coordonnées des vecteurs de la base  $(f(e_i))$  dans la base  $(e_i)$ . Ces vecteurs colonnes sont orthogonaux relativement au produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^n$  et de norme un si et seulement si la base  $(f(e_i))$  est orthonormée. On a vu que cela caractérise les isométries.

### 3.3 Isométries du plan euclidien

Pour illustrer les notions qu'on vient de définir, nous allons classer les isométries en dimension deux. On commence par travailler en coordonnées avec des matrices orthogonales.

**Proposition 23** *Toute matrice de  $SO_2(\mathbf{R})$  est la matrice d'une rotation. Toute matrice de  $O_2(\mathbf{R})$  de déterminant  $-1$  est la matrice d'une réflexion orthogonale.*

Rappelons qu'une réflexion orthogonale est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. En dimension 2, les hyperplans sont des droites.

**Preuve**

Une matrice de  $O_2(\mathbf{R})$  est de la forme  $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec ses deux colonnes de norme un et orthogonales entre elles, ce qui implique

$$\det \begin{pmatrix} a & -d \\ b & c \end{pmatrix} = ac + bd = 0.$$

Les vecteurs  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$  sont donc proportionnels et de norme un, le coefficient de proportionnalité vaut  $\pm 1$  et la matrice peut prendre une des deux formes suivantes.

- $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  : on obtient une rotation en posant  $a = \cos(\theta)$ ,  $b = \sin(\theta)$ .
- $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  : c'est une réflexion orthogonale. Calculons son axe de symétrie.

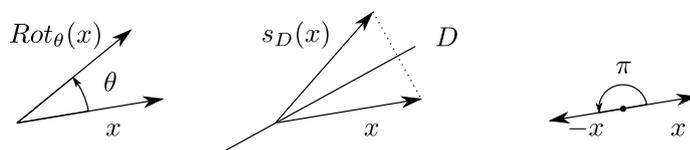
La droite de symétrie doit être fixe, on l'obtient en résolvant l'équation  $Av = v$ , ce qui donne  $v = \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$ .

L'espace orthogonal à  $\text{vect}(v)$  est une droite engendrée par le vecteur  $w = \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$ . L'image de ce vecteur par notre matrice vaut

$$Aw = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a-1) + b^2 \\ (a-1)b - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ -b \end{pmatrix} = -w$$

en prenant en compte la relation  $a^2 + b^2 = 1$ . Il s'agit donc bien d'une symétrie orthogonale relativement à  $\text{vect}(v)$ . La proposition est démontrée.

Attention, en dimension deux, une symétrie centrale est une rotation d'angle  $\pi$ , ce n'est pas une réflexion.



Il faut aussi faire attention à ne pas se laisser tromper par la terminologie que nous venons d'introduire. La matrice d'une symétrie orthogonale est orthogonale. Par contre, La matrice d'une projection orthogonale n'est pas orthogonale en général : une matrice orthogonale est inversible alors qu'une projection différente de l'identité n'est jamais inversible.

**Méthode :** *caractérisation des isométries de  $\mathbf{R}^2$*

Un élément  $P \in O_2(\mathbf{R})$  est une rotation si son déterminant est égal à 1 et une réflexion sinon. On détermine l'angle d'une rotation en mettant la première colonne sous la forme  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ . On trouve la droite fixée par une réflexion en résolvant le système linéaire  $Px = x$ .

### Exemples

- La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice de la réflexion orthogonale relativement à la droite engendrée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

**Corollaire 8** *Les isométries d'un espace vectoriel euclidien de dimension deux sont des rotations ou des réflexions orthogonales.*

## 4. Compléments

### 4.1 Isométries affines

Nous avons défini une isométrie comme une application linéaire d'un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  qui préserve la norme euclidienne. Il existe une notion plus générale d'isométrie reliée à la structure d'espace métrique d'un espace euclidien. Définissons la distance euclidienne entre deux points  $x, y \in E$  par  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Une application  $f : E \rightarrow E$  est une isométrie si elle préserve la distance :

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Ici, on ne suppose pas  $f$  linéaire.

La *translation* de vecteur  $v$  est l'application définie de  $E$  dans  $E$  par  $t_v(x) = x + v$ . C'est un exemple d'isométrie qui n'est pas une application linéaire. On peut composer les translations avec les isométries linéaires pour obtenir de nouvelles isométries.

**Définition 29** Une isométrie affine est la composée d'une translation et d'isométrie linéaire.

Il n'existe pas d'autres isométries dans un espace euclidien.

**Proposition 24** Dans un espace euclidien, toute isométrie est affine.

#### Preuve

Soit  $f : E \rightarrow E$  une isométrie qui fixe l'origine :  $f(0) = 0$ . Par définition d'une isométrie, cela implique  $\|f(x)\| = \|x\|$ . Montrons que  $f$  préserve le produit scalaire.

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= -\langle f(x), -f(y) \rangle \\ &= -\left( \|f(x) - f(y)\|^2 - 2\|f(x)\|^2 - 2\|f(y)\|^2 \right) \\ &= -\left( \|x - y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2 \right) \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Montrons que  $f$  est linéaire.

$$\begin{aligned} &\|f(x + y) - f(x) - f(y)\|^2 \\ &= \|f(x + y)\|^2 + \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 \\ &\quad - 2\langle f(x + y), f(x) \rangle - 2\langle f(x + y), f(y) \rangle - 2\langle f(x), f(y) \rangle \\ &= \|x + y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x + y, x \rangle - 2\langle x + y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle \\ &= \|x + y - x - y\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Un calcul analogue donne l'égalité  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

Soit maintenant  $f$  une isométrie qui ne fixe pas l'origine. On pose  $\tilde{f}(x) = f(x) - f(0)$ . Cette nouvelle application préserve l'origine, elle est donc linéaire et  $f = t_{f(0)} \circ \tilde{f}$ . La proposition est démontrée.

## 4.2 Déterminant de Gram

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $E$ . On peut restreindre le produit scalaire au sous-espace engendré par les  $v_i$ . Si ces vecteurs forment une famille libre, la matrice du produit scalaire prend la forme  $B = \{\langle v_i, v_j \rangle\}_{i,j}$ . Le déterminant de cette matrice est appelé déterminant de Gram.

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Si les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement dépendants, une relation de dépendance sur ces vecteurs induit une relation de dépendance sur les colonnes de la matrice  $B$  et le déterminant précédent est nul. On en déduit un critère d'indépendance en terme de produit scalaire.

**Proposition 25** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $E$ . Alors ces vecteurs forment une famille libre si et seulement si*

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) \neq 0.$$

Le déterminant de Gram est relié à la notion de volume. Par analogie avec le cas de la dimension deux, on définit le volume  $n$ -dimensionnel du parallélépipède de côtés  $v_1, \dots, v_n$  à partir du déterminant de la matrice dont les colonnes sont données par les coordonnées des  $v_j$  dans une base orthonormée  $(e_i)$  de l'espace engendré par les  $v_j$ .

**Définition 30** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille libre de  $E$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de l'espace engendré par les  $v_j$ . Le volume  $n$ -dimensionnel du parallélépipède de côtés  $v_1, \dots, v_n$  est défini par*

$$\text{vol}_n(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)| = |\det(\{\langle e_i, v_j \rangle\}_{i,j})|.$$

Nous allons exprimer ce volume comme un déterminant de Gram. La formule de changement de base pour les formes quadratiques définies positives s'exprime sous la forme  $B = {}^t P P$ , où  $P$  est la matrice de passage de la base  $(e_i)$  à la base  $(v_j)$ . Elle a pour colonnes les coordonnées des  $v_j$  dans la base  $(e_i)$ :  $P = \{\langle e_i, v_j \rangle\}_{i,j}$ . En prenant le déterminant, on obtient  $\det(B) = \det(P)^2$ , ce qui donne la formule

**Proposition 26**

$$\text{vol}_n(v_1, \dots, v_n) = |\det(\{\langle e_i, v_j \rangle\}_{i,j})| = \sqrt{\text{Gram}(v_1, \dots, v_n)}.$$

Le dernier terme ne dépend pas de la base  $(e_i)$ , on voit que le volume ne dépend pas de la base orthonormée choisie pour le calculer.

### 4.3 Distance à un sous-espace

Donnons une autre application du déterminant de Gram au calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace  $F$  d'un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . On définit la distance entre deux points  $x, y \in E$  ainsi que la distance entre un point  $x \in E$  et un sous-espace vectoriel  $F \subset E$  de dimension finie par

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

$$d(x, F) = \min\{d(x, y) \mid y \in F\}.$$

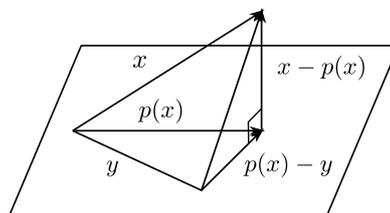
**Proposition 27** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Notons par  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors

$$d(x, F) = \|x - p(x)\|.$$

#### Preuve

Soit  $y \in F$ , les vecteurs  $x - p(x) \in F^\perp$  et  $p(x) - y \in F$  sont orthogonaux d'où

$$\|x - y\|^2 = \|x - p(x) + p(x) - y\|^2$$

$$= \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2.$$


La quantité  $\|x - p(x)\|$  minore donc  $\|x - y\|$  pour tout  $y \in F$  avec égalité si et seulement si  $y = p(x)$ .

Soit maintenant  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$  et  $v_{n+1} \in E$ . Nous pouvons exprimer la distance de  $v_{n+1}$  à  $F$  à l'aide des déterminants de Gram.

**Proposition 28** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille libre de  $E$  et  $v_{n+1} \in E$ . Alors le carré de la distance de  $v_{n+1}$  à l'espace  $F$  engendré par les  $v_i$  est donné par

$$d(v_{n+1}, F)^2 = \frac{\text{Gram}(v_1, \dots, v_{n+1})}{\text{Gram}(v_1, \dots, v_n)}.$$

#### Preuve

Si  $v_{n+1}$  est dans  $F$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon, on se place dans l'espace euclidien engendré par  $(v_1, \dots, v_{n+1})$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$  une base orthogonale de cet espace choisie de telle sorte que  $(e_1, \dots, e_n)$  soit une base de  $F$ . Le vecteur  $v_{n+1} - p(v_{n+1})$  est la projection de  $v_{n+1}$  sur  $e_{n+1}$  et vaut  $\langle e_{n+1}, v_{n+1} \rangle e_{n+1}$ .

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, e_1 \rangle & \dots & \langle v_n, e_1 \rangle & \langle v_{n+1}, e_1 \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle v_1, e_n \rangle & \dots & \langle v_n, e_n \rangle & \langle v_{n+1}, e_n \rangle \\ \langle v_1, e_{n+1} \rangle & \dots & \langle v_n, e_{n+1} \rangle & \langle v_{n+1}, e_{n+1} \rangle \end{pmatrix}^2$$

Tous les coefficients de la dernière ligne sont nuls hormis le dernier. On conclut en développant le déterminant relativement à cette ligne.



## Chapitre 4

# Réduction des applications linéaires

Ce chapitre est consacré à l'étude des applications linéaires. On commence par quelques rappels sur les déterminants avant d'aborder le procédé général de diagonalisation. Ce procédé consiste à trouver une base de l'espace constituée de vecteurs propres de l'application, afin d'en simplifier l'étude. Il n'est pas toujours possible de diagonaliser une application linéaire. Dans le cas euclidien, on introduira des classes d'applications pour lesquelles on peut effectuer la réduction en se basant sur les outils géométriques développés au chapitre précédent. On termine par quelques applications de la réduction à la géométrie.

## 1. Déterminant

### 1.1 Définition du déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée peut se définir par récurrence sur la dimension de la matrice, par développement relativement à la première colonne.

- Le déterminant d'une matrice  $1 \times 1$  est égal à son unique coefficient.

$$\det(a_{1,1}) = a_{1,1}.$$

- Le déterminant d'une matrice  $n \times n$  est alors obtenu grâce à la formule

$$\det(\{a_{i,j}\}_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(\{a_{l,m}\}_{l \neq k, m \neq 1}).$$

Le déterminant d'une matrice est parfois noté en remplaçant les parenthèses qui entourent les coefficients de la matrice par des barres verticales. Avec cette notation, la formule précédente s'écrit

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} a_{n,1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

**Exemple**

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ = 14 + 36 + 40 \\ = 90.$$

Il est aussi possible de définir le déterminant en développant en lignes plutôt qu'en colonnes.

## 1.2 Calculs de déterminants

Il est possible de calculer le déterminant de certaines matrices directement à partir de la définition précédente.

*Déterminant d'une matrice  $2 \times 2$*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

**Exemple**

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 \times 5 - 2 \times 2 = 21.$$

*Déterminant d'une matrice  $3 \times 3$*

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.$$

**Exemple**

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} = -1 + 30 + 30 + 10 + 15 + 6 = 90.$$

*Déterminant d'une matrice triangulaire*

Une matrice est *triangulaire supérieure* si  $a_{i,j} = 0$  pour tout  $i, j$  tels que  $i > j$ . Le déterminant d'une telle matrice est égal au produit de ses termes diagonaux.

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n-1,1} & a_{n,1} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{n-1,2} & a_{n,2} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,3} & a_{n,3} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

Cette proposition se démontre par récurrence sur la taille de la matrice. On en déduit que le déterminant de la matrice identité de taille  $n \times n$  est égal à 1.

Le déterminant peut aussi se calculer à l'aide de l'algorithme de Gauss.

**Méthode :** *calcul du déterminant par l'algorithme de Gauss*

Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne ne modifie pas la valeur du déterminant. Permuter deux lignes change son signe. En utilisant ces deux opérations, on peut mettre la matrice sous forme triangulaire en employant la méthode du pivot de Gauss. Le déterminant est alors égal au produit des termes diagonaux. Attention à ne pas oublier de changer le signe du déterminant chaque fois qu'on permute deux lignes.

**Exemple**

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 15 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = (-1) \times 5 \times (-18) = 90.$$

### 1.3 Propriétés des déterminants

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$ . Notons  $A_1, \dots, A_n$  ses colonnes et considérons le déterminant de  $A$  comme fonction des colonnes de  $A$  :

$$(A_1, \dots, A_n) \mapsto \det(A_1, \dots, A_n) = \det(A).$$

Les deux propriétés clef du déterminant sont les suivantes.

- Le déterminant est une fonction alternée des colonnes de la matrice : si deux colonnes sont égales, alors le déterminant est nul.
- Le déterminant dépend de manière linéaire de chacune des colonnes de la matrice : pour tout  $j$ , l'application  $A_j \mapsto \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n)$  est linéaire.

On démontre ces propriétés à partir de la définition du déterminant par une récurrence sur la taille de la matrice. On vérifie ensuite que toute fonction de  $n$  colonnes qui vérifie les deux propriétés précédentes est nécessairement proportionnelle au déterminant. À partir de cette caractérisation, on démontre les formules suivantes.

**Proposition 29** *Le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit des déterminants.*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

*Le déterminant d'une matrice inversible est égal à l'inverse de son déterminant.*

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

La multilinéarité implique également la formule

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Rappelons que la *transposée* de la matrice carrée  $A = \{a_{i,j}\}$  est la matrice de coefficients  $\{a_{j,i}\}$ . Elle est notée  ${}^tA$ . Les colonnes de  $A$  deviennent les lignes de  ${}^tA$  et vice-versa.

**Proposition 30** *Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.*

$$\det({}^tA) = \det(A).$$

Le déterminant permet aussi de déterminer si une matrice est inversible. C'est une propriété importante que nous utiliserons dans la suite pour calculer les valeurs propres d'une matrice.

**Proposition 31** *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Enfin, on peut faire appel au déterminant pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. La solution d'un système linéaire s'exprime comme un quotient de deux déterminants grâce aux formules de Cramer.

**Proposition 32 (formules de Cramer)** *Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et  $x, y$  deux vecteurs colonnes de taille  $n$ . Notons  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées de  $x$ . Supposons que  $Ax = y$  et  $\det(A) \neq 0$ . Alors on a pour tout  $j$ ,*

$$x_j = \frac{\det(A_1, \dots, A_{j-1}, y, A_{j+1}, \dots, A_n)}{\det(A_1, \dots, A_n)}.$$

*Le déterminant au dénominateur est le déterminant de la matrice  $A$ . Le déterminant au numérateur est celui de la matrice obtenue à partir de  $A$  en remplaçant sa colonne  $j$  par  $y$ .*

### Preuve des formules de Cramer

L'égalité  $Ax = y$  se traduit en colonnes par la relation  $\sum_k x_k A_k = y$ . On a alors

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_{j-1}, y, A_{j+1}, \dots, A_n) &= \det(A_1, \dots, A_{j-1}, \sum_k x_k A_k, A_{j+1}, \dots, A_n) \\ &= \sum_k x_k \det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_k, A_{j+1}, \dots, A_n) \\ &= x_j \det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) \end{aligned}$$

par linéarité et en utilisant le caractère alterné du déterminant.

Les formules de Cramer permettent d'exprimer les coordonnées d'un vecteur de  $\mathbf{R}^n$  dans une base donnée sous forme de déterminants. Considérons une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $\mathbf{R}^n$  et appliquons le résultat précédent à la matrice  $A$  dont les colonnes sont données par les  $v_j$ . On obtient :

**Corollaire 9** Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $\mathbf{R}^n$  et  $y$  un vecteur de  $\mathbf{R}^n$ . Alors

$$y = \sum_{j=1}^n \frac{\det(v_1, \dots, v_{j-1}, y, v_{j+1}, \dots, v_n)}{\det(v_1, \dots, v_n)} v_j.$$

**Méthode :** résolution d'un système par les formules de Cramer

Pour résoudre une équation linéaire de la forme  $AX = Y$ , on commence par calculer le déterminant de la matrice  $A$  qui doit être non nul pour qu'il y ait une unique solution. Pour calculer la coordonnée  $j$  de la solution  $X$ , on remplace la colonne  $j$  de  $A$  par  $Y$ , on calcule son déterminant et on divise par le déterminant de  $A$ .

**Exemple**

Résolvons le système suivant avec les formules de Cramer.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 = 8 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{10 \times 5 - 8 \times 2}{5 \times 5 - 2 \times 2} = \frac{34}{21},$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{5 \times 8 - 2 \times 10}{5 \times 5 - 2 \times 2} = \frac{20}{21}.$$

#### 1.4 Déterminant d'une application linéaire

Définissons le déterminant d'une application linéaire en faisant appel à sa matrice dans une certaine base.

**Définition 31** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire. Le déterminant de  $f$  est égal au déterminant de sa matrice dans une base quelconque de  $E$ . Il ne dépend pas de la base choisie.

Vérifions qu'il ne dépend pas de la base choisie. Soit  $(e_i), (e'_i)$  deux bases de  $E$ ,  $A$  et  $A'$  les matrices de  $f$  dans ces bases et  $P$  la matrice de passage de la base  $(e_i)$  à la base  $(e'_i)$ . La formule de changement de base donne

$$A' = P^{-1}AP$$

d'où  $\det(A') = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$ . Deux matrices conjuguées ont même déterminant.

### Exemples

- Le déterminant de l'application identité  $id : x \mapsto x$  est égal à 1.
- Une homothétie  $f(x) = \lambda x$  définie sur un espace de dimension  $n$  a un déterminant égal à  $\lambda^n$ .
- Une isométrie définie sur un espace de dimension finie a un déterminant égal à  $\pm 1$  car sa matrice est orthogonale.

On dira qu'une application linéaire  $f : E \rightarrow E$  *préserve l'orientation*, ou encore qu'elle est directe, si son déterminant est strictement positif. Si l'espace  $E$  est orienté, l'image d'une base directe par une telle application est directe. Une application dont le déterminant est strictement négatif renverse l'orientation : l'image d'une base directe est indirecte et réciproquement. C'est une conséquence de la formule du produit pour le déterminant.

Dans ce cours, nous utiliserons le déterminant pour

- déterminer si une matrice est inversible,
- déterminer si une famille de vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  est une base,
- résoudre des systèmes linéaires,
- calculer des valeurs propres.

En analyse, le déterminant est aussi employé pour calculer des volumes, faire des changements de variables dans les intégrales multiples, etc.

## 2. Diagonalisation

### 2.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Soit  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . Rappelons que la somme de ces sous-espaces est définie par

$$E_1 + \dots + E_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n\}.$$

**Définition 32** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que ces sous-espaces sont en somme directe si tout élément  $x \in E_1 + \dots + E_n$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_1 + \dots + x_n \quad \text{avec } x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n.$$

La somme de ces sous-espaces est alors notée  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ .

On dit qu'un espace vectoriel  $E$  est somme directe des sous-espaces  $E_1, E_2, \dots, E_n$  si  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ .

Remarquons que des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  tous non nuls sont linéairement indépendants entre eux si et seulement si les droites associées  $\text{vect}(v_1), \dots, \text{vect}(v_n)$  sont en somme directe.

**Méthode :** *caractérisation des sommes directes*

Pour montrer que des sous-espaces  $E_1, \dots, E_n$  sont en somme directe, il suffit de vérifier que pour tout  $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ , la condition  $x_1 + \dots + x_n = 0$  implique que tous les  $x_i$  sont nuls. Pour montrer que deux sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe, il suffit de montrer que leur intersection ne contient que le vecteur nul :  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ .

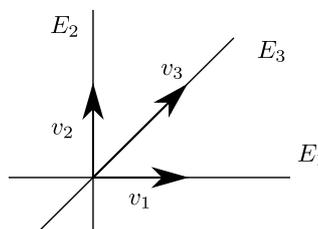
De fait, si un vecteur  $x$  admettait deux décompositions différentes, la différence donnerait une somme nulle, comprenant au moins un vecteur non nul. Dans le cas de deux sous-espaces, si  $x_1 + x_2$  est nul sans que  $x_1$  et  $x_2$  ne soient nuls, le vecteur  $x = x_1 = -x_2$  appartient à l'intersection sans être nul.

On peut vérifier que les sous-espaces  $E_1, \dots, E_n$  sont en somme directe si et seulement si pour tout  $k > 1$ ,  $E_k$  est en somme directe avec  $E_1 + \dots + E_{k-1}$ . Par contre, il ne suffit pas qu'ils soient en somme directe deux à deux.

### Exemples

– Considérons les sous-espaces de  $\mathbf{R}^2$  donnés par  $E_i = \text{vect}(v_i)$  avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



On a  $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_1 \cap E_3 = \{0\}$  si bien que deux quelconques de ces sous-espaces sont en somme directe. Par contre, les trois sous-espaces ne sont pas en somme directe car le vecteur  $v_2$  admet deux décompositions possibles en somme d'éléments de  $E_1, E_2$  et  $E_3$  :

$$\begin{aligned} v_2 &= 0 + v_2 + 0 \\ &= v_1 + 0 + v_3. \end{aligned}$$

– Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $E_1$  un sous-espace de dimension finie. On a vu au chapitre précédent que  $E = E_1 \oplus E_1^\perp$  (corollaire 6).

– Les deux sous-espaces vectoriels de  $C^0([0,1], \mathbf{R})$  donnés par

$$E_1 = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}, \quad E_2 = \{\text{fonctions constantes}\}$$

sont en somme directe :  $E = E_1 \oplus E_2$ . Cela découle de l'exemple précédent en prenant  $E_2 = \text{vect}(\mathbf{1}_{[0,1]})$  et  $E_1 = E_2^\perp$ , en notant  $\mathbf{1}_{[0,1]}$  la fonction constante égale à un sur  $[0,1]$ .

La dimension d'une somme directe se calcule aisément.

**Proposition 33** Soient  $E$  un espace vectoriel,  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels de dimension finie en somme directe et  $\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n$  des bases de chacun des  $E_i$ . L'ensemble des vecteurs appartenant à toutes ces bases forme une base de la somme

$$E_1 \oplus \dots \oplus E_n$$

et

$$\dim E_1 \oplus \dots \oplus E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n.$$

**Preuve**

Pour chaque  $i$ , choisissons une base  $(e_{i,j})_j$  de chacun des  $E_i$  et montrons que la famille  $(e_{i,j})_{i,j}$  qui contient tous les éléments de ces bases est une base de la somme. C'est bien une famille génératrice car tout élément de la somme est somme de vecteurs qui s'expriment comme combinaisons linéaires des éléments de ces bases. Elle est libre : s'il existe des coefficients  $c_{i,j}$  tels que  $\sum_{i,j} c_{i,j} e_{i,j} = 0$ , la somme des vecteurs  $\sum_j c_{i,j} e_j \in E_i$  est nulle. Chacun de ces vecteurs est donc nul car la somme est directe et on conclut que pour tout  $i$ , les  $(c_{i,j})_j$  sont nuls par indépendance des  $(e_{i,j})_j$ .

Lorsque deux espaces ne sont pas en somme directe, on peut tout de même donner une formule pour la dimension de la somme.

**Proposition 34** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension finie. Alors

$$\dim (E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim (E_1 \cap E_2).$$

**Preuve**

Considérons un sous-espace  $E'$  de  $E_1$  qui est un supplémentaire de  $E_1 \cap E_2$ . Montrons que  $E'$  et  $E_2$  sont en somme directe. Soit  $x \in E' \cap E_2$ , le vecteur  $x$  est dans  $E'$  donc dans  $E_1$  et dans  $E' \cap E_1 \cap E_2 = \{0\}$ . On a donc

$$E_1 = E' \oplus (E_1 \cap E_2), \quad E_1 + E_2 = E' \oplus E_2,$$

d'où  $\dim E_1 + E_2 = \dim E' + \dim E_2 = \dim E_1 - \dim E_1 \cap E_2 + \dim E_2$ .

Terminons par un résultat propre aux espaces euclidiens qui donne un lien entre orthogonalité et somme directe.

**Proposition 35** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  orthogonaux entre eux :

$$\text{pour tout } i, j \text{ distincts, pour tout } x_i \in E_i, x_j \in E_j, \quad \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

Alors ces sous-espaces sont en somme directe.

**Preuve**

Soit  $x_i \in E_i$  tels que  $x_1 + \dots + x_n = 0$ . Faisons le produit scalaire avec  $x_j$  pour tout  $j$  :

$$0 = \langle x_1 + \dots + x_n, x_j \rangle = \langle x_1, x_j \rangle + \dots + \langle x_n, x_j \rangle = \|x_j\|^2.$$

On conclut que  $x_j = 0$  pour tout  $j$ .

**2.2 Valeurs propres et vecteurs propres**

**Définition 33** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire. Un nombre réel  $\lambda$  est appelé valeur propre réelle de  $f$  s'il existe un vecteur  $v \in E$  non nul tel que

$$f(v) = \lambda v.$$

Les vecteurs satisfaisant cette égalité sont appelés vecteurs propres de  $f$  associés à la valeur propre  $\lambda$ .

On définit de la même façon la notion de valeur propre complexe, associée à un vecteur propre  $v \in \mathbf{C}^n$  non nul qui satisfait  $f(v) = \lambda v$ . Remarquons que les vecteurs propres associés à une valeur propre  $\lambda$  sont exactement les éléments du noyau de  $f - \lambda id$ , où  $id : E \rightarrow E$  est l'application identité :  $id(x) = x$ .

**Définition 34** Le sous-espace vectoriel  $\ker(f - \lambda id)$  est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . Il est composé des vecteurs propres associés à  $\lambda$ .

**Exemples**

- L'application identité a une unique valeur propre égale à 1 et tous les vecteurs sont propres.
- Une symétrie centrale a une unique valeur propre égale à  $-1$ . Là encore, tous les vecteurs de l'espace sur lequel est définie la symétrie sont des vecteurs propres.

Nous allons faire appel à la notion de polynôme caractéristique pour calculer ces valeurs propres.

**Proposition 36** Soit  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire définie sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ . Le polynôme caractéristique  $P_c$  de  $f$  est le polynôme défini sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  par

$$P_c(X) = \det(X id - f).$$

Un nombre réel (ou complexe)  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  si et seulement si il est racine réelle (ou complexe) du polynôme caractéristique.

On démontre par récurrence, en développant par rapport à la première colonne, que le polynôme caractéristique a un degré égal à  $n$ . Le polynôme caractéristique est parfois défini par la formule

$$P_c(X) = \det(f - X \text{id}) = (-1)^n \det(X \text{id} - f).$$

C'est le même polynôme à un signe près.

### Preuve

Il existe un vecteur  $v$  non nul tel que  $f(v) = \lambda v$  si et seulement si on a l'égalité  $(f - \lambda \text{id})v = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $f - \lambda \text{id}$  est une application qui n'est pas inversible. C'est équivalent à l'annulation de son déterminant. La proposition est démontrée.

**Méthode :** *Calcul des valeurs propres d'une application linéaire*

On se place dans une base de  $E$ , notons  $A$  la matrice de  $f$  dans cette base. Il faut calculer le polynôme caractéristique  $P_c(X) = \det(X \text{id} - A)$ , par exemple en développant ce déterminant en colonne, puis trouver ses racines.

### Exemples

– L'identité, définie de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$ , a pour polynôme caractéristique

$$P_c(X) = \det(X \text{id} - \text{id}) = \det((X - 1) \text{id}) = (X - 1)^n.$$

– La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour polynôme caractéristique

$$P_c(X) = \det \begin{pmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = X^2 - 1.$$

Elle possède deux valeurs propres réelles  $-1$  et  $1$ .

– La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour polynôme caractéristique

$$P_c(X) = \det \begin{pmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = X^2 + 1.$$

La matrice n'a pas de valeurs propres réelles. Elle possède cependant deux valeurs propres complexes  $i$  et  $-i$ .

– La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour polynôme caractéristique

$$P_c(X) = \det \begin{pmatrix} X - 1 & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = X^2 - X - 1.$$

Le discriminant de ce polynôme vaut  $5$ . La matrice possède deux valeurs propres réelles données par

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

De manière générale, le polynôme caractéristique de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est donné par

$$\det \left( X \text{id} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} X - a & -b \\ -c & X - d \end{pmatrix} = X^2 - (a + d)X + ad - bc.$$

Le discriminant de ce polynôme vaut  $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$ . S'il est strictement positif, la matrice a deux valeurs propres réelles. S'il est strictement négatif, la matrice a deux valeurs propres complexes qui ne sont pas réelles.

Terminons par un corollaire de la proposition précédente, qui fait le lien entre déterminant et valeurs propres complexes d'une application linéaire.

**Corollaire 10** *Soit  $f$  une application linéaire définie sur un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie  $n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les racines complexes de son polynôme caractéristique. Alors*

$$\det(f) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

On dit que le déterminant est égal au produit des valeurs propres, comptées avec multiplicités, la *multiplicité* d'une valeur propre faisant référence au nombre de fois où elle apparaît dans l'expression factorisée du polynôme caractéristique. Il faut bien noter que dans le cas réel, il ne suffit pas de faire le produit des valeurs propres réelles pour obtenir le déterminant en général.

Pour démontrer ce corollaire, il suffit de factoriser le polynôme  $P_c$  sur  $\mathbf{C}$ ,

$$P_c(X) = \det(X \text{id} - f) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

et de l'évaluer en  $X = 0$ . L'existence d'une telle factorisation est présentée en complément (proposition 41, page 94) et découle du théorème de d'Alembert-Gauss.

### Exemples

– L'homothétie de  $\mathbf{R}^n$  donnée par  $x \mapsto \lambda x$  a pour polynôme caractéristique

$$P_c(X) = \det(X \text{id} - \lambda \text{id}) = (X - \lambda)^n = \prod_{i=1}^n (X - \lambda).$$

Cette application a pour valeur propre  $\lambda$  avec multiplicité  $n$  et son déterminant vaut  $\lambda^n$ .

– La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est de déterminant 1, on a vu précédemment qu'elle n'a pas de valeurs propres réelles. Elle possède cependant deux valeurs propres complexes  $i$  et  $-i$  et on a bien l'égalité  $1 = i \times (-i)$ .

$$P_c(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i).$$

### 2.3 Diagonalisation

On cherche une base dans laquelle l'application a une expression particulièrement simple.

**Définition 35** Une application linéaire  $f : E \rightarrow E$  définie sur un espace vectoriel réel  $E$  est dite diagonalisable sur  $\mathbf{R}$  s'il existe une base de  $E$  composée de vecteurs propres de  $f$ .

De manière équivalente,  $f$  est diagonalisable si l'une des deux conditions suivantes est réalisée,

$$E = \bigoplus_k \ker(f - \lambda_k id), \quad \dim E = \sum_k \dim \ker(f - \lambda_k id).$$

On a une définition analogue pour les applications définies sur un espace vectoriel complexe.

On parle d'application diagonalisable car la matrice d'une telle application dans la base de vecteurs propres est diagonale. Pour déterminer si une matrice est diagonalisable, il faut calculer ses valeurs propres et les vecteurs propres associés. Si l'ensemble de ces vecteurs propres forment une base, la matrice est diagonalisable.

**Méthode :** Calcul des vecteurs propres d'une application linéaire

Il s'agit de déterminer une base de  $\ker(f - \lambda id)$ . On a vu au premier chapitre comment procéder. Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans une base de  $E$ . On résout le système  $(A - \lambda id)v = 0$  par la méthode du pivot de Gauss. Les coordonnées obtenues sont celles des vecteurs propres dans la base considérée.

#### Exemples

– La réflexion orthogonale de  $\mathbf{R}^2$  relativement à la droite dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  a pour matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et pour valeurs propres  $-1$  et  $1$ .

Calculons les vecteurs propres  $x = (x_1, x_2)$  associés à la valeur propre  $1$ . L'équation  $Ax = x$  donne le système

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \end{cases}$$

soit  $\ker(A - id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Calculons les vecteurs propres  $x = (x_1, x_2)$  associés à la valeur propre  $-1$ . L'équation  $Ax = -x$  donne le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases}$$

soit  $\ker(A + id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ .

Une base diagonalisant  $A$  est donc donnée par  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ .

– La rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  a pour matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , elle n'a pas de valeurs propres réelles ni de vecteurs propres réels. Considérons  $A$  comme agissant sur  $\mathbf{C}^2$  plutôt que  $\mathbf{R}^2$ . Ses valeurs propres complexes sont  $i$  et  $-i$ , calculons les vecteurs propres complexes associés.

Calculons les vecteurs propres  $z = (z_1, z_2)$  associés à la valeur propre  $i$ . L'équation  $Az = iz$  donne le système

$$\begin{cases} -iz_1 - z_2 & = & 0 \\ z_1 - iz_2 & = & 0 \end{cases}$$

soit  $\ker(A - id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Calculons les vecteurs propres  $z = (z_1, z_2)$  associés à la valeur propre  $-i$ . L'équation  $Az = -z$  donne le système

$$\begin{cases} iz_1 - z_2 & = & 0 \\ z_1 + iz_2 & = & 0 \end{cases}$$

soit  $\ker(A + iid) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Une base diagonalisant  $A$  sur  $\mathbf{C}$  est donc donnée par  $\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

– La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour valeurs propres  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Calculons les vecteurs propres  $x = (x_1, x_2)$  associés à la valeur propre  $\lambda_1$ . L'équation  $Az = \lambda_1 z$  donne le système

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - \lambda_1 x_2 & = & 0 \end{cases}$$

soit  $\ker(A - \lambda_1 id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . De même,  $\ker(A - \lambda_2 id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Une base diagonalisant  $A$  sur  $\mathbf{C}$  est donc donnée par  $\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

## 2.4 Interprétation matricielle

Les résultats précédents peuvent s'exprimer en termes de matrices. Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$ . On peut parler de valeurs, vecteurs et sous-espaces propres de  $A$ . Ce sont ceux de l'application linéaire définie de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$  associée à  $A$ . De même, une matrice est diagonalisable si cette application est diagonalisable. Cette propriété peut se reformuler comme suit.

**Proposition 37** *Une matrice  $A$  de taille  $n \times n$  est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  de tailles  $n \times n$  telles que*

$$A = PDP^{-1}.$$

Les coefficients diagonaux de  $D$  sont les valeurs propres de  $A$  et les colonnes de la matrice  $P$  sont des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs.

### Preuve

Supposons  $A$  diagonalisable. Soit  $(e'_i)$  une base de vecteurs propres de  $A$ ,  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(e'_i)$  et  $D$  la matrice de  $A$  dans cette base  $(e'_i)$ . Cette matrice  $D$  est diagonale et par la formule de changement de base,  $A = PDP^{-1}$ .

Réciproquement, si  $A$  est de la forme  $PDP^{-1}$ , notons  $(e_i)_i$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ ,  $e'_j$  la  $j^{\text{ième}}$  colonne de  $P$  et  $\lambda_j$  le  $j^{\text{ième}}$  coefficient diagonal de  $D$ . Des relations

$$De_j = \lambda_j e_j, \quad e_j = Pe'_j, \quad D = P^{-1}AP,$$

on en déduit que  $Ae'_j = \lambda_j e'_j$ . La famille  $(e'_j)$  forme une base de  $\mathbf{R}^n$  car la matrice  $P$  est inversible.

### Exemples

Les exemples précédents donnent les relations

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Mettre une matrice sous forme diagonale est très utile du point de vue calculatoire. Cela permet d'inverser ou de calculer les puissances de la matrice facilement. Si deux matrices  $A$  et  $B$  satisfont la relation de conjugaison  $A = PBP^{-1}$  alors

$$A^n = PB^nP^{-1} \quad \text{et} \quad A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}.$$

Démontrons la première égalité :  $A^n = PBP^{-1}PBP^{-1} \dots PBP^{-1} = PB^nP^{-1}$ .

Donnons une application concernant la suite de Fibonacci (1175 - 1250). Cette suite est définie par la relation de récurrence suivante.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Les premiers termes de cette suite sont donnés par

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597 \dots$$

On peut écrire la relation de récurrence définissant  $(u_n)_{n \geq 0}$  sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

ce qui implique

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

D'après l'exemple précédent,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

On a posé  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  pour alléger les expressions. On obtient

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tout calcul fait, on obtient

$$u_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Le même principe marche pour toute suite définie par une récurrence linéaire.

## 2.5 Cas des valeurs propres distinctes

Nous allons voir plusieurs situations dans lesquelles il est possible d'affirmer qu'une matrice est diagonalisable sans procéder au calcul des vecteurs propres. La première situation repose sur le théorème suivant.

**Théorème 9** *Soit  $E$  un espace vectoriel,  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes de  $f$ . Alors les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont en somme directe :*

$$\ker(f - \lambda_1 \text{id}) \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_k \text{id}).$$

### Preuve

On procède par récurrence sur  $k$ . Il n'y a rien à montrer pour  $k = 1$ . Soit  $v_i \in \ker(f - \lambda_i \text{id})$  tels que  $\sum v_i = 0$ . Appliquons  $f - \lambda_k \text{id}$  à cette égalité pour faire disparaître le vecteur  $v_k$ . Nous avons  $(f - \lambda_k \text{id}) v_i = (\lambda_i - \lambda_k) v_i$  ce qui entraîne

$$(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0.$$

Par l'hypothèse de récurrence, chacun des termes de cette somme est nul et comme les valeurs propres sont distinctes, les  $v_i$  sont nuls pour  $i < k$ .

Comme la somme de tous les  $v_i$  est nulle, le vecteur  $v_k$  est aussi nul. Le résultat est démontré.

On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 10** *Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$  et soit  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire. Si le polynôme caractéristique de  $f$  possède  $n$  racines réelles distinctes, alors  $f$  est diagonalisable sur  $\mathbf{R}$ .*

**Preuve**

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les racines du polynôme caractéristique. Les sous-espaces propres  $\ker(f - \lambda_k id)$  sont non vides, en somme directe. Pour chaque  $k$ , choisissons  $v_k \in \ker(f - \lambda_k id)$  non nul. La famille  $(v_k)$  est libre car ces sous-espaces sont en somme directe. Elle contient autant de vecteurs que la dimension de  $E$ . C'est donc une base de vecteurs propres. La proposition est démontrée.

Le même résultat est vrai avec des espaces vectoriels sur  $\mathbf{C}$ .

Le théorème précédent est intéressant car il y a des conditions explicites pour déterminer si un polynôme a toutes ses racines complexes distinctes à partir des coefficients du polynôme.

Par exemple, un polynôme de degré deux a deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est non nul. Pour un polynôme de la forme  $P(X) = X^2 + aX + b$ , le discriminant vaut

$$\Delta = a^2 - 4b.$$

Il existe un analogue du discriminant en tout degré. Pour un polynôme de degré 3 de la forme  $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ , il vaut

$$\Delta = a^2b^2 + 18abc - 27c^2 - 4b^3 - 4a^3c.$$

Il y a bien sûr des applications diagonalisables dont les racines ne sont pas toutes distinctes, comme par exemple l'identité ou les homothéties. On en verra d'autres dans la suite.

### 3. Transformations autoadjointes

#### 3.1 Adjoint d'une application linéaire

On introduit la notion de transformation adjointe à une application linéaire définie sur un espace euclidien.

**Définition 36** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire. Une application linéaire  $f^* : E \rightarrow E$  est dite adjointe à  $f$  si*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

Si  $E$  est de dimension finie, alors l'application adjointe  $f^*$  existe et est unique. La matrice de l'adjointe  $f^*$  dans une base orthonormée  $(e_i)$  de  $E$  est égale à la transposée de celle de  $f$ .

Vérifions qu'en dimension finie, une application  $f^*$  est adjointe à  $f$  si et seulement si sa matrice est égale à la transposée de celle de  $f$  dans une base orthonormée donnée  $(e_i)$ . Rappelons que la matrice de  $f$  a pour coefficients  $a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$  dans une telle base. Les coefficients de la matrice de  $f^*$  sont alors égaux à

$$\langle e_i, f^*(e_j) \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_j, f(e_i) \rangle = a_{j,i}.$$

Réciproquement, si  $f^*$  est l'application associée à la matrice transposée de celle de  $f$ , on a pour tous  $x, y \in E$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  dans la base  $(e_i)$ ,

$$\langle f(x), y \rangle = \sum_i \left( \sum_j a_{i,j} x_j \right) y_i = \sum_j \left( \sum_i a_{i,j} y_i \right) x_j = \langle f^*(y), x \rangle.$$

### Exemples

- Une matrice  $P$  est orthogonale si  ${}^tP = P^{-1}$ . L'adjointe d'une application orthogonale est donc égale à son inverse.
- Les projections orthogonales sont égales à leurs adjointes. Cela est une conséquence de la proposition suivante.

**Proposition 38** Une application linéaire  $p : E \rightarrow E$  définie sur un espace euclidien de dimension finie est une projection orthogonale si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes.

- $p \circ p = p$ ,
- $p^* = p$ .

### Preuve

Soit  $p$  une projection orthogonale sur  $F = \text{im}(p)$  et  $x, y \in E$ . On sait que  $p(x) \in F$  et  $y - p(y) \in F^\perp$ . Nous avons donc  $\langle p(x), y - p(y) \rangle = 0$  et en inversant le rôle de  $x$  et  $y$ ,

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle = \langle x, p(y) \rangle.$$

Réciproquement, posons  $F = \text{im}(p)$  et soit  $x \in E$ . Le vecteur  $p(x)$  est dans  $F$ , il faut vérifier que le vecteur  $x - p(x)$  est orthogonal à  $F$ . Considérons un vecteur  $y \in F$ . Il est de la forme  $y = p(z)$  pour un certain  $z \in E$ , ce qui implique

$$p(y) = p(p(z)) = p(z) = y.$$

Montrons que  $x - p(x)$  est orthogonal à  $y$  :

$$\langle x - p(x), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle p(x), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, p(y) \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0.$$

Le théorème est démontré.

On montre de la même façon qu'une symétrie orthogonale est caractérisée par les deux égalités  $s \circ s = id$  et  $s^* = s$ .

### 3.2 Diagonalisation des applications autoadjointes

On va étudier le problème de la diagonalisation pour les applications d'un espace euclidien qui sont égales à leurs adjointes.

**Définition 37** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension finie et soit  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire. L'application  $f$  est dite autoadjointe si

$$\text{pour tout } x \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

En d'autres termes,  $f$  est autoadjointe si elle est égale à son adjointe.

Rappelons que la matrice de l'adjoint d'une transformation est égale à la transposée de sa matrice et qu'une matrice est *symétrique* si elle est égale à sa transposée. Une transformation est donc autoadjointe si et seulement si sa matrice est symétrique.

**Théorème 11 (diagonalisation des applications autoadjointes)** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension finie et  $f : E \rightarrow E$  une application autoadjointe. Alors il existe une base orthonormée constituée de vecteurs propres de  $f$ .

On dit que  $f$  est diagonalisable en base orthonormée. La preuve du théorème repose sur deux lemmes.

**Lemme 2** Les valeurs propres complexes d'une application linéaire autoadjointe d'un espace euclidien de dimension finie sont toutes réelles.

#### Preuve

On se place dans une base orthonormée de  $E$  et on note  $A$  la matrice de  $f$ . Faisons agir cette matrice sur  $\mathbf{C}^n$ . Supposons que  $A$  admet une valeur propre  $\lambda \in \mathbf{C}$ . On peut alors trouver un vecteur propre  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{C}^n$  tel que  $Av = \lambda v$ . Montrons que  $\lambda$  est en fait réelle.

Notons  $\bar{v}$  le vecteur dont les coordonnées sont les conjuguées de celles de  $v$ . La matrice  $A$  est à coefficients réels et on obtient par conjugaison

$$Av = \lambda v, \quad A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}.$$

En coordonnées, le produit scalaire est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$$

pour tous vecteurs  $x, y$  à coefficients réels et nous l'étendons aux vecteurs à coefficients complexes en utilisant la même égalité. Comme  $A$  est autoadjointe, nous avons

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$$

pour tous vecteurs  $v, w$  à coefficients réels. Cette égalité s'étend aux vecteurs à coefficients complexes par bilinéarité. Au final,

$$\lambda \langle v, \bar{v} \rangle = \langle Av, \bar{v} \rangle = \langle v, A\bar{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle.$$

On conclut que  $\lambda = \bar{\lambda}$  car  $\langle v, \bar{v} \rangle = \sum_i |v_i|^2$  est non nul.

**Lemme 3** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $f$  une application autoadjointe. Si  $f(F) \subset F$  Alors  $f(F^\perp) \subset F^\perp$ .*

**Preuve**

Soit  $x \in F^\perp$ , il faut montrer que pour tout vecteur  $y \in F$ , on a  $\langle f(x), y \rangle = 0$ .  
Mais

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

et ce dernier terme est nul car  $f(y)$  est dans  $f(F) \subset F$  et  $x$  est dans  $F^\perp$ .

**Preuve du théorème de diagonalisation**

On procède par récurrence sur la dimension de  $E$ . Toute matrice est diagonalisable en dimension un. En dimension plus grande, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, rappelé en complément (théorème 14, page 94), le polynôme caractéristique de  $A$  admet une racine dans  $\mathbf{C}$ , la matrice  $A$  admet donc une valeur propre  $\lambda_1 \in \mathbf{C}$  et par le premier lemme, nous savons que  $\lambda_1$  est réelle. Notons  $F = \ker(f - \lambda_1 id)$  son sous-espace propre. Par le second lemme, on peut restreindre  $f$  à  $F^\perp$  et par l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée  $(e_i)$  de  $F^\perp$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

Nous avons vu précédemment que  $F \oplus F^\perp = E$  (corollaire 6). Il suffit donc de rajouter à cette base  $(e_i)$  les éléments d'une base orthonormée de  $F$  pour obtenir une base orthonormée de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ . Le théorème est démontré.

### 3.3 Interprétation matricielle

Le théorème de diagonalisation des applications autoadjointes admet une interprétation en termes de matrices.

**Théorème 12** *Soit  $S$  une matrice symétrique. Alors il existe une matrice orthogonale  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que*

$$S = PDP^{-1}.$$

*Les termes diagonaux de  $D$  sont les valeurs propres de  $S$  et  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres de  $S$ .*

Notons que comme  $P$  est une matrice orthogonale, nous avons  $P^{-1} = {}^tP$ . Les matrices  $S$  et  $D$  sont non seulement conjuguées mais aussi congruentes.

**Méthode :** *diagonalisation des matrices symétriques*

On commence par calculer les valeurs propres de la matrice. Pour chaque valeur propre, on trouve une base du sous-espace propre associé en utilisant la méthode du pivot de Gauss. Il faut ensuite orthonormaliser cette base, par exemple en utilisant le procédé de Gram-Schmidt. Notons que si l'espace propre est de dimension un, il suffit de normaliser un vecteur de cet espace. L'ensemble des vecteurs appartenant à toutes ces bases forme une base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$ . La matrice  $P$  recherchée a pour colonnes ces vecteurs et la matrice  $D$  a pour coefficients diagonaux les valeurs propres associées.

La proposition suivante montre que les vecteurs obtenus par la méthode précédente forment bien une base orthonormée.

**Lemme 4** *Les sous-espaces propres d'une application autoadjointes sont orthogonaux entre eux.*

**Preuve**

Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux valeurs propres distinctes de  $f$  et  $v_1, v_2$  deux vecteurs propres associés. Nous avons

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle Av_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Av_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle,$$

ce qui implique  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ .

**Exemple**

On considère la matrice symétrique  $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique vaut  $P_c(X) = \det \begin{pmatrix} X-1 & -2 & 0 \\ -2 & X-3 & -2 \\ 0 & -2 & X-1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} P_c(X) &= (X-1)((X-3)(X-1) - 4) + 2 \times -2(X-1) \\ &= (X-1)(X^2 - 4X - 5) \\ &= (X-1)(X+1)(X-5). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont égales à 1, -1 et 5.

Les vecteurs propres  $x = (x_1, x_2, x_3)$  associés à la valeur propre 1 vérifient

$$\begin{cases} 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 & = 0 \end{cases}$$

ce qui donne  $\ker(B - id) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

Les vecteurs propres  $x = (x_1, x_2, x_3)$  associés à la valeur propre  $-1$  vérifient

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

ce qui donne  $\ker(B + id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Les vecteurs propres  $x = (x_1, x_2, x_3)$  associés à la valeur propre  $5$  vérifient

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 & = 0 \end{cases}$$

ce qui donne  $\ker(B - 5id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Les espaces propres sont de dimension un, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur chacun de ces espaces, il suffit de normaliser pour obtenir les colonnes de la matrice  $P$ . La matrice  $D$  a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de  $B$ . On obtient :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et la matrice symétrique  $S$  se diagonalise comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1}$$

Remarquons que la matrice  $P$  est facile à inverser car son inverse est égal à sa transposée.

Le théorème 4 affirme que toute matrice symétrique  $S$  est de la forme  ${}^tPDP$  avec  $P$  inversible et  $D$  une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux appartiennent à  $\{-1, 0, 1\}$ . Expliquons comment on peut retrouver ce résultat à partir du théorème 13. La matrice  $D$  apparaissant dans ce théorème a pour coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Considérons la matrice diagonale  $D'$  dont les coefficients diagonaux sont donnés par les signes  $+1$  ou  $-1$  des  $\lambda_i$  pour les  $\lambda_i$  non nuls et zéro sinon. Considérons également la matrice diagonale  $D''$  dont les coefficients diagonaux sont les racines  $\sqrt{|\lambda_i|}$  pour les  $\lambda_i$  non nuls et 1 pour les  $\lambda_i$  nuls. On a alors

$$D = D''D'D'',$$

$$S = {}^tPDP = {}^tPD''D'D''P = {}^t(D''P)D'(D''P),$$

ce qui donne la décomposition du théorème 4.

### 3.4 Réduction simultanée

Donnons une application de la diagonalisation des matrices symétriques à l'étude des formes quadratiques.

**Théorème 13 (réduction simultanée)** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension finie et  $Q$  une forme quadratique définie sur  $E$ . Alors il existe une base  $(e_i)$  de  $E$  qui est à la fois orthonormée pour le produit scalaire de  $E$  et orthogonale pour la forme quadratique  $Q$ .*

*Dans une telle base,  $Q$  prend la forme*

$$Q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2,$$

*où les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de la matrice de  $Q$  dans la base  $(e_i)$ . La signature de  $Q$  est donnée par le signe de ces valeurs propres.*

#### Preuve

Soit  $B$  la matrice de la forme quadratique dans une base orthonormée  $(e_i)$  de  $E$ . Cette matrice est symétrique. D'après le théorème précédent, il existe une matrice orthogonale  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telle que

$$D = P^{-1} B P = {}^t P B P.$$

Considérons la base  $(e'_i)$  de  $E$  dont les coordonnées des vecteurs sont données par les colonnes de  $P$ . La matrice  $P$  est la matrice de passage de la base  $(e_i)$  à la base  $(e'_i)$ . La matrice  $P$  est orthogonale donc la base  $(e'_i)$  est orthonormée. La matrice de la forme quadratique  $Q$  dans cette base est égale à  $D$ , en vertu de la formule du changement de base pour les formes quadratiques. Cette base est donc orthogonale pour  $Q$ .

#### Méthode : réduction simultanée des formes quadratiques

Pour obtenir une base qui est simultanément orthonormée relativement à un produit scalaire et orthogonale pour une forme quadratique définie sur le même espace, on commence par écrire la matrice de la forme quadratique dans une base orthonormée relativement au produit scalaire. On diagonalise alors cette matrice en base orthonormée. La base obtenue est celle recherchée.

#### Exemple

Plaçons nous sur  $\mathbf{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel et considérons la forme quadratique

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 + 4x_2 x_3.$$

Sa matrice vaut  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

C'est la matrice de l'exemple précédent. Ses valeurs propres sont égales à 1,  $-1$  et 5. Deux valeurs propres sont strictement positives et une valeur propre est strictement négative. La signature de  $Q$  vaut donc  $(2,1)$ . La base recherchée est composée des vecteurs propres que nous avons calculés précédemment :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est orthonormée pour le produit scalaire usuel de  $\mathbf{R}^3$  et orthogonale pour la forme quadratique  $Q$ . Il ne reste plus qu'à effectuer le changement de variables

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

pour simplifier l'expression de  $Q$  :

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2. \end{aligned}$$

## 4. Compléments

Donnons deux applications de la réduction simultanée.

### 4.1 Comparaison des normes euclidiennes

La première permet de comparer des normes euclidiennes. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien muni d'une forme quadratique  $Q$  définie positive. Nous avons deux structures euclidiennes sur  $E$ , une associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et l'autre à la forme bilinéaire venant de  $Q$ . Nous voulons les comparer.

**Proposition 39** *Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $Q$  une forme quadratique définie sur  $E$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de la matrice de  $Q$  dans une base orthonormée pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Alors pour tout  $x \in E$ ,*

$$(\min_k \lambda_k) \|x\|^2 \leq Q(x) \leq (\max_k \lambda_k) \|x\|^2.$$

#### Preuve

Il suffit de se placer dans une base  $(e_i)$  de diagonalisation simultanée.

$$Q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq (\max_k \lambda_k)(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

On procède de manière analogue pour l'autre inégalité.

On voit donc que les normes associées à deux formes quadratiques définies positives sont équivalentes. Remarquons qu'on a égalité dans la majoration de  $Q(x)$  pour les vecteurs appartenant au sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre.

#### Exemple

Considérons la forme quadratique définie sur  $\mathbf{R}^2$  par

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Elle a pour matrice  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$  dans la base canonique et pour polynôme caractéristique

$$P_c(X) = (X - 1)^2 - (1/2)^2 = (X - 1/2)(X - 3/2).$$

Les racines de ce polynôme valent  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{2}$ . On en déduit l'encadrement

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \leq \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

## 4.2 Caractéristiques géométriques des coniques

Rappelons qu'une conique est un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^2$  défini par une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

On se restreint au cas où la conique est une ellipse ou une hyperbole pour alléger la présentation :  $b^2 - 4ac \neq 0$ .

On peut reprendre les méthodes du chapitre portant sur les coniques en substituant à la réduction de Gauss la diagonalisation simultanée. On obtient le résultat suivant.

**Proposition 40** *Considérons une conique  $\mathcal{C}$  de  $\mathbf{R}^2$  associée à une forme quadratique non dégénérée :  $b^2 - 4ac \neq 0$ . Alors il existe un changement de variables de la forme*

$$\begin{cases} X &= a_{1,1}x + a_{1,2}y + b_1 \\ Y &= a_{2,1}x + a_{2,2}y + b_2 \end{cases}$$

avec  $\{a_{i,j}\}$  matrice orthogonale, qui transforme l'expression de la conique en

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \mu.$$

Les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de la matrice associée à la forme quadratique  $ax^2 + bxy + cy^2$ .

Comme le changement de variable est associé à une matrice orthogonale, il préserve la distance euclidienne et il est possible de calculer les caractéristiques métriques de la conique à partir de son expression réduite.

Pour une ellipse par exemple, la longueur du grand axe et du petit axe sont donnés par  $a = \mu/\sqrt{\lambda_1}$  et  $b = \mu/\sqrt{\lambda_2}$ .

Les coefficients  $\mu$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  n'étant déterminés qu'à un facteur multiplicatif près, il est naturel d'introduire un invariant métrique basé sur le quotient de deux de ces nombres.

**Définition 38** *Quitte à intervertir les variables  $X$  et  $Y$  dans la forme réduite d'une conique et à changer son signe, on peut supposer  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  et  $\lambda_1 \geq 0$ .*

*L'excentricité  $e \in [0, \infty[$  d'une conique est alors définie par  $e = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ .*

L'excentricité d'une ellipse est strictement inférieure à 1, celle d'une hyperbole strictement supérieure à 1. Par convention, on pose  $e = 1$  pour les paraboles. Une ellipse proche d'un cercle a une excentricité proche de 0.

### 4.3 Théorème de d'Alembert-Gauss

Le théorème suivant est dû à Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) et Carl Friedrich Gauss (1777-1855). C'est un résultat que nous avons utilisé dans la preuve du théorème de diagonalisation des applications autoadjointes.

**Théorème 14** *Tout polynôme non constant défini sur  $\mathbf{C}$  à coefficients complexes admet une racine complexe.*

#### Preuve

On procède par l'absurde. Soit  $P(X)$  un polynôme non constant défini sur  $\mathbf{C}$  sans racine. Comme  $|P(z)|$  tend vers l'infini quand  $|z|$  tend vers l'infini et que  $|P(z)|$  ne s'annule pas, il possède un minimum non nul atteint en un point  $z_0 \in \mathbf{C}$ . On peut le supposer égal à 1 et atteint en 0, en remplaçant  $P(z)$  par  $P(z + z_0)/P(z_0)$ .

Nous pouvons écrire le polynôme  $P(z)$  sous la forme

$$P(z) = 1 + cz^{n_0} + cz^{n_0}Q(z)$$

pour un certain entier  $n_0$ , un coefficient  $c \neq 0$  et  $Q(z)$  un polynôme qui s'annule en 0. Soit  $\alpha \in \mathbf{C}$  tel que  $\alpha^{n_0} = -1/c$ . Il suffit de se déplacer dans la direction  $\alpha$  pour faire décroître le module de  $P$  et obtenir une contradiction. Soit  $t \in ]0,1[$  tel que  $|Q(\alpha t)| \leq 1/2$ . Alors

$$P(\alpha t) = 1 - t^{n_0} - t^{n_0}Q(\alpha t),$$

$$|P(\alpha t)| \leq 1 - t^{n_0} + t^{n_0} |Q(\alpha t)| \leq 1 - t^{n_0}/2 < 1.$$

Le résultat est démontré.

Le théorème de d'Alembert-Gauss implique que tout polynôme complexe est un produit de polynômes de degré un.

**Proposition 41** *Soit  $P(X)$  un polynôme à coefficients complexes de degré  $n > 0$ . Alors il existe des nombres complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , pas nécessairement distincts, tels que*

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_n).$$

La preuve se fait par récurrence sur le degré. Le polynôme  $P(X)$  possède une racine  $\lambda_1$  par le théorème précédent. Par division euclidienne, il existe un polynôme  $Q(X)$  de degré un de moins que le degré de  $P(X)$  tel que  $P(X) = (X - \lambda_1)Q(X)$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à  $Q(X)$  s'il est de degré non nul. Dans le cas contraire, il est constant et on conclut.

La preuve du théorème de d'Alembert-Gauss ne donne pas de moyen explicite pour calculer les racines d'un polynôme. C'est une preuve non constructive qui affirme l'existence d'un objet mathématique, un zéro de  $P(X)$ , sans donner de méthode pour le construire. En pratique, on a recours à des algorithmes comme la méthode de Newton pour obtenir des valeurs approchées des racines réelles ou complexe d'un polynôme.

#### 4.4 Espaces préhilbertiens

Il existe une généralisation naturelle de la notion d'espace euclidien pour les espaces vectoriels complexes. Elle consiste à placer une conjugaison sur les coefficients du second vecteur du produit scalaire, de façon à ce que la forme quadratique associée soit à valeurs réelles.

**Définition 39** Soit  $E$  un espace vectoriel défini sur  $\mathbf{C}$ . Une forme hermitienne sur  $E$  est une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{C}$  qui satisfait pour tout  $z, v, w$  dans  $E$  et  $\lambda \in \mathbf{C}$ ,

$$\begin{aligned} - \varphi(\lambda v + w, z) &= \lambda \varphi(v, z) + \varphi(w, z), \\ - \varphi(z, \lambda v + w) &= \varphi(z, v) + \bar{\lambda} \varphi(z, w), \\ - \varphi(v, w) &= \overline{\varphi(w, v)}. \end{aligned}$$

La forme quadratique associée  $Q(z) = \varphi(z, z)$  est à valeurs réelles en raison de la conjugaison complexe qui apparaît dans la définition.

#### Exemples

– Sur  $\mathbf{C}^n$ , le produit hermitien usuel est défini par

$$\varphi(z, w) = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n.$$

pour tout  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{C}^n$ . La forme quadratique associée vaut

$$Q(z) = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2.$$

– Sur  $C^0([0,1], \mathbf{C})$ , le produit hermitien usuel est défini par

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

La forme quadratique associée vaut

$$Q(f) = \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

À chaque forme hermitienne est associée une matrice  $B$  à coefficients complexes satisfaisant  ${}^t B = \bar{B}$ . La forme  $\varphi$  s'exprime en fonction de cette matrice par la formule

$$\varphi(x, y) = {}^t x B \bar{y} = \sum_{i,j} z_i b_{i,j} \bar{w}_j = b_{1,1} z_1 \bar{w}_1 + b_{1,2} z_1 \bar{w}_2 + \dots + b_{n,n} z_n \bar{w}_n.$$

La théorie des formes hermitiennes procède de manière analogue au cas réel. En particulier, on a une notion de signature et un algorithme de Gauss qui repose sur les règles suivantes.

$$\text{Règle 1 : } |z|^2 + 2\operatorname{re}(z\bar{a}) = |z + a|^2 - |a|^2.$$

$$\text{Règle 2 : } z\bar{w} + z\bar{a}_1 + a_2\bar{w} = (z + a_2)\overline{(w + a_1)} - a_2\bar{a}_1.$$

$$\text{Règle 3 : } 4\operatorname{re}(z\bar{w}) = |z + \bar{w}|^2 - |z - \bar{w}|^2.$$

**Proposition 42** *Soit  $E$  un espace vectoriel complexe et soit  $Q$  une forme quadratique hermitienne de signature  $(p, q)$ . Alors il existe  $p + q$  formes  $\mathbf{C}$ -linéaires indépendantes  $l_1, \dots, l_{p+q}$  définies sur  $E$  telles que*

$$Q(z) = \sum_{i=1}^p |l_i(z)|^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} |l_j(z)|^2.$$

Notons le module qui apparaît dans la proposition précédente. Les formes  $l_i$  sont à valeurs complexes et linéaires sur  $\mathbf{C}$ .

### Exemples

$$- \varphi(z, w) = z_1\bar{w}_1 + 3z_2\bar{w}_2 + 2z_1\bar{w}_2 + 2z_2\bar{w}_1.$$

Sa matrice vaut  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . L'algorithme de Gauss donne

$$\begin{aligned} Q(z) &= |z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 2z_1\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_1 \\ &= |z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 4\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \\ &= |z_1 + 2z_2|^2 - |z_2|^2. \end{aligned}$$

$$- Q(z, w) = z_1\bar{w}_1 + 3z_2\bar{w}_2 + 2iz_1\bar{w}_2 - 2iz_2\bar{w}_1$$

Sa matrice vaut  $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$ . L'algorithme de Gauss donne

$$\begin{aligned} Q(z) &= |z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 2iz_1\bar{z}_2 - 2iz_2\bar{z}_1 \\ &= |z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 4\operatorname{Re}(iz_1\bar{z}_2) \\ &= |z_1 + 2iz_2|^2 - |z_2|^2. \end{aligned}$$

**Définition 40** *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel complexe muni d'une forme hermitienne dont la forme quadratique associée est définie positive. Une telle forme est appelée produit scalaire hermitien.*

Utilisons la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pour un produit scalaire hermitien. L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient

$$\forall z, w \in E, \quad |\langle z, w \rangle|^2 \leq Q(z)Q(w)$$

et on peut définir la notion de projection orthogonale comme dans le cas réel.

En matière de diagonalisation, on introduit les notions suivantes.

**Définition 41** Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $f : E \rightarrow E$  une application  $\mathbf{C}$ -linéaire. On dit que  $f$  admet un adjoint s'il existe une application  $\mathbf{C}$ -linéaire  $f^* : E \rightarrow E$  qui satisfait pour tout  $z, w \in E$ ,

$$\langle f(z), w \rangle = \langle z, f^*(w) \rangle.$$

L'application  $f$  est dite

- hermitienne si  $f = f^*$ ,
- unitaire si  $f^*f = id$ ,
- normale si  $ff^* = f^*f$ .

En dimension finie, toute application  $f$  a un adjoint. Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base orthonormée, son adjoint a pour matrice  ${}^t\bar{A}$ . On pose

$$A^* = {}^t\bar{A}.$$

La notion d'application hermitienne généralise la notion d'application autoadjointe dans le cas réel. La notion d'application unitaire généralise celle d'application orthogonale. La nouveauté est la notion d'application normale. Notons que les applications hermitiennes et unitaires sont normales. Le théorème de diagonalisation s'énonce comme suit.

**Théorème 15 (théorème spectral)** Soit  $E$  un espace préhilbertien et soit  $f : E \rightarrow E$  une application normale. Alors  $f$  est diagonalisable en base orthonormée.

En particulier, les matrices unitaires sont diagonalisables sur  $\mathbf{C}$  alors que les matrices orthogonales ne sont pas diagonalisables sur  $\mathbf{R}$ . La version matricielle de ce théorème donne

**Théorème 16** Soit  $A$  une matrice à coefficients complexes vérifiant

$$A^*A = AA^*.$$

On dit qu'une telle matrice est normale. Alors il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice unitaire  $U$  telles que

$$A = UDU^*.$$

Si  $A$  est hermitienne, les coefficients diagonaux de  $D$  sont réels. Si  $A$  est unitaire, les coefficients diagonaux de  $D$  sont de module un.

En particulier, toute matrice à coefficients réels qui est orthogonale est unitaire donc diagonalisable sur  $\mathbf{C}$ .

La preuve dans le cas hermitien est similaire au cas réel. Pour les matrices normales, on les décompose sous la forme  $A' + iA''$  avec  $A'$  et  $A''$  des matrices hermitiennes qui commutent, en posant  $A' = \frac{1}{2}(A + A^*)$  et  $A'' = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ . Comme ces deux matrices commutent, les sous-espaces propres de  $A'$  sont invariants par  $A''$ . Il devient possible de diagonaliser  $A'$  puis ensuite de diagonaliser  $A''$  sur chacun des sous-espaces propres de  $A'$  de façon à trouver une base qui diagonalise simultanément les deux matrices.

**Exemple**

Diagonalisation des rotations du plan hermitien.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

## Chapitre 5

### Annexes

#### 1. Erreurs courantes

Voici quelques remarques motivées par des erreurs trouvées trop souvent dans les copies d'examen.

1) *Le noyau d'une matrice n'est jamais vide.*

Il contient toujours le vecteur nul. Ce vecteur est habituellement noté  $0$ . Dans  $\mathbf{R}^n$ , il a pour coordonnées  $(0,0,\dots,0)$ . Attention à ne pas confondre les notations suivantes :

- l'ensemble vide :  $\emptyset$ ,
- l'ensemble contenant le vecteur nul :  $\{0\}$ .

2) *Le noyau d'une matrice est un espace vectoriel.*

Ce n'est jamais un vecteur. Lorsqu'une matrice est inversible, son noyau contient un seul élément, le vecteur nul.

3) *Un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$  est de dimension inférieure ou égale à  $n$ .*

Il ne suffit pas de compter le nombre de vecteurs dans une famille génératrice pour en déduire sa dimension. En particulier, l'espace vectoriel engendré par les vecteurs suivants n'est pas de dimension trois :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4) *Un système de  $k$  équations cartésiennes dans  $\mathbf{R}^n$  ne définit pas nécessairement un sous-espace vectoriel de dimension  $n - k$ .*

La dimension d'un sous-espace vectoriel défini par un système linéaire homogène s'obtient en calculant la dimension du noyau de la matrice  $A$  associée au système. Elle est égale à  $n - \text{rang}(A)$ .

5) *Le déterminant est défini pour les matrices carrées uniquement.*

Il est inutile de chercher à calculer le déterminant d'une matrice non carrée. Le déterminant des matrices suivantes n'est pas défini.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6) Si le noyau d'une forme quadratique  $Q$  est nul, il peut malgré tout exister des vecteurs  $x$  non nuls tels que  $Q(x) = 0$ .

Il ne faut pas confondre le cône des vecteurs isotropes  $\{x \mid Q(x) = 0\}$  et le noyau d'une forme quadratique  $\{x \mid \forall y, \varphi(x, y) = 0\}$ . Le noyau est inclus dans le cône mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

7) Une conique est un sous-ensemble du plan.

La conique d'équation  $X^2 + Y^2 = 1$  est un cercle.

La quadrique d'équation  $X^2 + Y^2 = 1$  est un cylindre.

8) Des vecteurs peuvent être linéairement dépendants sans être proportionnels deux à deux.

C'est toujours le contre-exemple  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Remarquons par contre que des vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux sont orthogonaux entre eux et linéairement indépendants.

9) L'inégalité de Cauchy-Schwarz ne prend pas de  $t$ .

Il s'agit de Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) et non de Laurent Schwartz (1915-2002).

10) On obtient une base à la fois orthonormée pour un produit scalaire et orthonormale pour une forme quadratique grâce à l'algorithme de réduction simultanée.

Construire une base orthogonale pour la forme quadratique par l'algorithme de Gauss puis la transformer en base orthonormée par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ne donne pas un résultat correct.

11) Les calculs doivent être menés jusqu'au bout.

Un résultat de la forme  $\frac{1,45}{12} + 1$  ne rapporte aucun point à l'examen. Il est conseillé d'utiliser pour les réponses numériques un format en accord avec celui de l'énoncé. Les fractions doivent être mises sous forme irréductible,  $\frac{2}{3}$  plutôt que  $\frac{12}{18}$ . Les racines doivent figurer au numérateur,  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  plutôt que  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

## 2. Formulaire

Dans ce qui suit,

$E$  est un espace vectoriel muni de deux bases  $(e_i)_{i=1..n}$ ,  $(e'_i)_{i=1..n}$ ,

$P$  est la matrice de passage entre ces deux bases,

$(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées d'un vecteur  $x$  dans la base  $(e_i)$ ,

$(y_1, \dots, y_n)$  sont les coordonnées d'un vecteur  $y$  dans la base  $(e_i)$ ,

$(x'_1, \dots, x'_n)$ ,  $(y'_1, \dots, y'_n)$ , sont les analogues dans la base  $(e'_i)$ ,

$\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ ,

$B$  est la matrice de  $b$  dans la base  $(e_i)$ ,

$B'$  est la matrice de  $b$  dans la base  $(e'_i)$ ,

$Q$  est la forme quadratique associée à  $\varphi$ ,

$X, Y$  sont des nombres réels,

$v_1, \dots, v_n$  sont des vecteurs de  $E$ ,

$\theta$  est l'angle, orienté ou non, entre  $x$  et  $y$ ,

$\det$  est le déterminant,

$A$  est une matrice,

${}^tA$  est sa transposée,

$f$  est une application linéaire,

$f^*$  est son adjointe.

### Formes quadratiques

*Forme bilinéaire*

$$\varphi(x, y) = {}^t x B y = \sum_{i,j} x_i b_{i,j} y_j = b_{1,1} x_1 y_1 + b_{1,2} x_1 y_2 + \dots + b_{n,n} x_n y_n$$

*Formule du rang*

$$\dim \ker(\varphi) + \text{rang}(\varphi) = \dim E$$

*Changement de base pour les vecteurs*

$$x = P x', \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

*Changement de base pour les applications linéaires*

$$A' = P^{-1} A P$$

*Changement de base pour les formes bilinéaires*

$$B' = {}^t P B P$$

*Forme quadratique*

$$Q\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = {}^t x B x = \sum_{i,j} b_{i,j} x_i x_j = \sum_i b_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} b_{i,j} x_i x_j$$

*Formules de polarisation*

$$Q(x+y) = Q(x) + 2\varphi(x,y) + Q(y)$$

$$Q(x-y) = Q(x) - 2\varphi(x,y) + Q(y)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x) + Q(y) - Q(x-y))$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$$

*Identités remarquables*

$$X^2 + Xa = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$XY + Xa_1 + Ya_2 = (X + a_2)(Y + a_1) - a_1 a_2$$

$$XY = \frac{1}{4}(X+Y)^2 - \frac{1}{4}(X-Y)^2$$

**Espaces euclidiens**

*Décomposition en base orthonormée ( $e_i$ )*

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n$$

*Produit scalaire*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

*Carré de la norme*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

*Inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

*Inégalité triangulaire*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

*Aire des parallélogrammes*

$\text{aire}(x,y) = |x_1y_2 - x_2y_1|$  dans une base orthonormée

$$\langle x,y \rangle^2 + \text{aire}(x,y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$$

*Identité de Lagrange*

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$

*Formule du parallélogramme*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2$$

*Formule de la médiane*

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2$$

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$$

*Théorème de Pythagore*

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2 \quad \text{si } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ pour tout } i \neq j$$

*Relations entre aire, longueur et angle*

$$\langle x,y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$$

$$\det(x,y) = \|x\| \|y\| \sin(\theta) \quad (\theta \text{ orienté})$$

*Espace orthogonal en dimension finie*

$$E = F \oplus F^\perp$$

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

*Projection sur  $\text{vect}(e_1, \dots, e_n)$*

$$p(x) = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \quad \text{si } (e_i) \text{ est orthonormée}$$

*Projection sur  $\text{vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$*

$$p(x) = x - \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \quad \text{si } (e_i) \text{ est orthonormée}$$

*Projection sur la droite  $\text{vect}(v)$*

$$p(x) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

*Projection sur l'hyperplan  $\text{vect}(v)^\perp$*

$$p(x) = x - \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

*Symétrie orthogonale*

$$s(x) = 2p(x) - x$$

*Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$e_{k+1} = \frac{v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i}{\|v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i\|}$$

### Déterminants

*Développement relativement à la première colonne*

$$\det(\{a_{i,j}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(\{a_{l,m}\}_{l \neq k, m \neq 1})$$

*Déterminant d'une matrice  $2 \times 2$*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

*Déterminant d'une matrice  $3 \times 3$*

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbh - ceg - fha - ibd$$

*Déterminant d'un produit*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

*Déterminant de l'inverse*

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

*Déterminant d'un multiple*

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

*Déterminant de la transposée*

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

*Formules de Cramer*

$$\text{si } Ax = y, \text{ alors } x_j = \frac{\det(A_1, \dots, A_{j-1}, y, A_{j+1}, \dots, A_n)}{\det(A_1, \dots, A_n)}$$

**Diagonalisation**

*Dimension d'une somme directe*

$$\dim E_1 \oplus \dots \oplus E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n$$

*Dimension d'une somme*

$$\dim (E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim (E_1 \cap E_2)$$

*Polynôme caractéristique*

$$P_c(X) = \det(Xid - f)$$

*Caractérisation des projections orthogonales*

$$p \circ p = p, \quad p^* = p$$

*Caractérisation des symétries orthogonales*

$$s \circ s = id, \quad s^* = s$$

*Caractérisation de l'adjoint*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

*Excentricité d'une conique*

$$e = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad \text{si } \lambda_1 \geq \lambda_2 \text{ et } \lambda_1 > 0$$

*Forme hermitienne*

$$\varphi(x, y) = {}^t z B \bar{w} = \sum_{i,j} z_i b_{i,j} \bar{w}_j = b_{1,1} z_1 \bar{w}_1 + b_{1,2} z_1 \bar{w}_2 + \dots + b_{n,n} z_n \bar{w}_n$$

*Produit scalaire hermitien*

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

*Carré de la norme hermitienne*

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$

### 3. Méthodes

Voici la liste des méthodes présentées dans ce texte.

#### Chapitre 1 : rappels d'algèbre linéaire

– Résolution des systèmes linéaires échelonnés réduits .....	10
– Mise sous forme échelonnée d'une matrice .....	12
– Mise sous forme échelonnée réduite d'une matrice .....	12
– Résolution des systèmes linéaires généraux .....	14
– Inversion d'une matrice .....	15
– Calcul d'une base du noyau ou de l'image d'une matrice .....	16
– Calcul d'équations paramétriques pour un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ .....	18
– Calcul d'équations cartésiennes pour un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ .....	18
– Calcul d'une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ .....	19

#### Chapitre 2 : formes quadratiques

– Indépendance d'une famille de formes linéaires .....	25
– Calcul de la matrice associée à une forme quadratique .....	31
– Réduction des formes quadratiques .....	33
– Construction d'une base orthogonale .....	36
– Calcul de la signature d'une forme quadratique .....	39
– Réduction de l'équation d'une conique .....	41

#### Chapitre 3 : espaces euclidiens

– Calcul de l'aire d'un parallélogramme de $\mathbf{R}^n$ .....	52
– Calculs d'angles et de produits scalaires .....	53
– Calcul du projecteur orthogonal sur un sous-espace .....	57
– Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt .....	59
– Caractérisation des matrices orthogonales .....	62
– Caractérisation des isométries de $\mathbf{R}^2$ .....	64

#### Chapitre 4 : diagonalisation

– Calcul du déterminant par l'algorithme de Gauss .....	71
– Résolution d'un système par les formules de Cramer .....	73
– Caractérisation des sommes directes .....	75
– Calcul des valeurs propres d'une application linéaire .....	78
– Calcul des vecteurs propres d'une application linéaire .....	80
– Diagonalisation des matrices symétriques .....	88
– Réduction simultanée des formes quadratiques .....	90

## Notations

Les ensembles des nombres entiers, entiers relatifs, rationnels, réels et complexes sont notés respectivement  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$ .

$A, P$	matrices
$a_{i,j}, b_{i,j}$	coefficients de matrices
$\arccos$	fonction arccosinus
$\varphi$	forme bilinéaire
$B$	matrice d'une forme bilinéaire
$C^0([0,1],\mathbf{R})$	espace des applications continues sur $[0,1]$
$\mathcal{C}$	conique
$\det$	déterminant
$\Delta$	discriminant
$\dim$	dimension
$E$	espace vectoriel
$F$	sous-espace vectoriel de $E$
$F^\perp$	orthogonal de $F$
$H$	hyperplan
$f$	application linéaire
$f^*$	application adjointe de $f$
$\text{id}$	application identité
$\text{im}$	image
$\ker$	noyau
$l$	forme linéaire
$M_n(\mathbf{R})$	ensemble des matrices de taille $n \times n$
$\ x\ $	norme de $x$
$\emptyset$	ensemble vide
$O_n(\mathbf{R})$	ensemble des matrices orthogonales
$SO_n(\mathbf{R})$	matrices orthogonales de déterminant un
$P_c(X)$	polynôme caractéristique
$(p,q)$	signature
$Q$	forme quadratique
$\mathcal{Q}$	quadrique
$S$	matrice symétrique
$\theta$	angle
$x, y$	vecteurs
$X, Y$	nombres réels
$\langle x,y \rangle$	produit scalaire
$\in$	appartenance
$\subset$	inclusion
$\cap$	intersection
$\oplus$	somme directe
$\circ$	composition



# Index

- adjoint, 84
- aire, 51
  - parallélogramme, 52, 103
- angle
  - non orienté, 52
  - orienté, 55
- application
  - autoadjointe, 86
  - diagonalisable, 80
  - hermitienne, 97
  - normale, 97
  - unitaire, 97
- axes, ellipse, 93
- base, 19
  - canonique, 24
  - directe, 55
  - duale, 23
  - orthogonale, 36
  - orthonormée, 50
- canonique, 24
- cartésienne, 17, 18
- Cauchy-Schwarz, 50, 102
- centre, ellipse, 41
- cône, 43, 45
  - isotrope, 31, 100
- congruence, 29
- conique, 40, 93
- conjugaison, 28
- Cramer, 72, 73
- D'Alembert-Gauss, 94
- demi-tour, 59
- diagonalisation, 80, 105
  - cas hermitien, 97
  - cas normal, 97
  - cas symétrique, 87, 88
  - cas unitaire, 97
  - valeurs propres distinctes, 84
- discriminant, 40, 41
- distance, 65
- définie négative, 32
- définie positive, 32
- dégénérée, 29
- déterminant, 55, 56, 69, 104
  - de Gram, 66
- échelonnée, 9, 12
- échelonnée réduite, 10, 12
- ellipse, 40, 41, 93
- ellipsoïde, 43, 45
- équation
  - cartésienne, 17, 18
  - conique, 40
  - hyperplan, 23
  - paramétrique, 17, 18
  - quadrique, 42
- espace euclidien, 49
- espace préhilbertien, 96
- excentricité, 93, 105
- forme bilinéaire, 26, 101
  - non dégénérée, 29
  - symétrique, 26
- forme hermitienne, 105
- forme linéaire, 21
- forme polaire, 30
- forme quadratique, 30, 102
  - discriminant, 40, 41
  - définie négative, 32
  - définie positive, 32
  - noyau, 31
  - négative, 32
  - positive, 32
  - rang, 31
  - réduction, 33
  - signature, 32, 33, 38, 39

- formule
  - de Cramer, 72, 73, 105
  - de la médiane, 53, 54, 103
  - de polarisation, 31, 102
  - du parallélogramme, 53, 103
  - du rang, 9, 29, 101
- Gram, déterminant, 66
- Gram-Schmidt, 59, 104
- groupe orthogonal, 62
- groupe spécial orthogonal, 62
- hermitienne, 97
- homothétie, 74, 79
- hyperbole, 40, 42, 93
- hyperboloïde, 43–45
- hyperplan, 22, 104
- identité
  - de Lagrange, 52, 103
  - de polarisation, 31, 102
- image, 9, 16
- indépendance, 25
- inversion, 15
- inégalité
  - de Cauchy-Schwarz, 50, 102
  - triangulaire, 50, 102
- isométrie, 61, 64
- isométrie affine, 65
- isotrope, 31, 100
- libre, 17, 66
- matrice
  - adjointe, 84
  - congruente, 29
  - conjuguée, 28
  - de passage, 28
  - diagonalisable, 80
  - normale, 97
  - orthogonale, 62
  - symétrique, 86
  - transposée, 72
  - triangulaire, 10
  - unitaire, 97
- échelonnée, 9, 12
- échelonnée réduite, 10, 12
- multiplicité, 79
- médiane, 53, 54, 103
- normale, 97
- norme
  - euclidienne, 49
  - équivalente, 92
- noyau, 8, 16
  - forme bilinéaire, 29
  - forme quadratique, 31
- orientation, 54, 74
- orthogonal, 56
- orthonormalisation, 59, 104
- parabole, 40, 93
- paraboloïde, 43, 45
- parallélogramme
  - aire, 51, 52, 103
  - formule, 53, 103
- paramétrique, 17, 18
- pivot, 9, 11
- polarisation, 31, 102
- polynôme caractéristique, 77, 105
- produit hermitien, 96
- produit scalaire, 49, 102
- projecteur orthogonal, 57
- projection orthogonale, 56, 103
- propre
  - sous-espace, 77
  - valeur, 77, 78
  - vecteur, 77, 80
- Pythagore, 54, 103
- quadrique, 42, 45
- rang, 9, 16
  - forme bilinéaire, 29
  - forme quadratique, 31
- rotation, 62, 98
- réduction, 33
- réduction simultanée, 90
- réflexion orthogonale, 58, 63

- signature, 32, 33, 38, 39
- somme directe, 74, 105
- sous-espace propre, 77
- symétrie orthogonale, 58, 59, 61, 63, 104
- symétrique, 86
- théorème
  - d'inertie de Sylvester, 47
  - d'orthonormalisation, 60
  - de congruence, 38
  - de D'Alembert-Gauss, 94
  - de diagonalisation, 84, 86, 87
  - de Pythagore, 54, 103
  - de réduction, 33
  - de réduction simultanée, 90
  - spectral, 97
- translation, 65
- transposée, 72
- triangulaire, 10
- unitaire, 97
- valeur propre, 77, 78
- variable principale, 10
- vecteur isotrope, 31
- vecteur propre, 77, 80
- volume, 66

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Rappels d'algèbre linéaire</b>	<b>7</b>
1 Généralités sur les matrices . . . . .	7
2 Matrices échelonnées . . . . .	9
3 Algorithme du pivot de Gauss . . . . .	11
<b>2 Formes quadratiques</b>	<b>21</b>
1 Formes linéaires . . . . .	21
2 Formes bilinéaires . . . . .	26
3 Formes quadratiques . . . . .	30
4 Coniques et quadriques affines . . . . .	40
5 Compléments . . . . .	46
<b>3 Espaces euclidiens</b>	<b>49</b>
1 Produit scalaire . . . . .	49
2 Orthogonalité . . . . .	56
3 Isométries . . . . .	61
4 Compléments . . . . .	65
<b>4 Réduction des applications linéaires</b>	<b>69</b>
1 Déterminant . . . . .	69
2 Diagonalisation . . . . .	74
3 Transformations autoadjointes . . . . .	84
4 Compléments . . . . .	92
<b>5 Annexes</b>	<b>99</b>
1 Erreurs courantes . . . . .	99
2 Formulaire . . . . .	101
3 Méthodes . . . . .	106
<b>Notations</b>	<b>107</b>
<b>Index</b>	<b>109</b>