Chapitre I: Principaux théorèmes pour l'analyse de réseaux électriques

I.1. Pont diviseur de tension:

Ce théorème est utilisé pour calculer des tensions aux bornes des impédances placées en série (Fig.I.1). Soit n résistances placées en série et alimentées par une tension E.

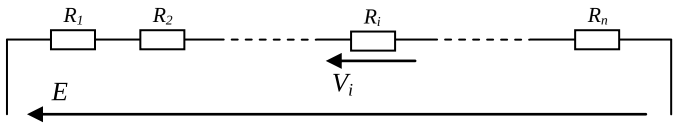


Fig.I.1. Application du pont diviseur de tension sur une association de résistances en série.

La tension aux borne de la i-ième résistance s'écrit:

$$V_i = \frac{R_i}{\sum_{j=1}^{n} R_j} E$$

Exemple 1:

Soit à déterminer la tension aux bornes de la résistance R_2 (Fig.I.2).

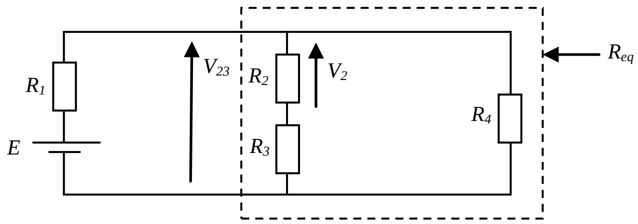


Fig.I.2. Exemple d'application du pont diviseur de tension sur des résistances

On remarque que les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle avec la résistance R_4, alors:

$$R_{eq} = (R_2 + R_3)//R_4$$

Les résistances R_{eq} et R_1 sont en série, donc: $V_{23} = \frac{R_{eq}}{R_{eq}+R_1} E$

Les résistance R_2 et R_3 sont en série, donc: $V_2 = \frac{R_2}{R_2+R_3} V_{23}$

En remplaçant V_{23}, on obtient: $V_2 = \frac{R_2}{R_2+R_3}\frac{R_{eq}}{R_{eq}+R_1} E$

Exemple 2:

Soit le circuit constitué de 4 impédances de la figure I.3, alimentées par une source de tension sinusoïdale e tel que: $e(t) = E\sqrt{2}\, sin(\omega t + \theta)$.

On cherche à écrire l'expression de la tension aux bornes du condensateur en fonction de e.

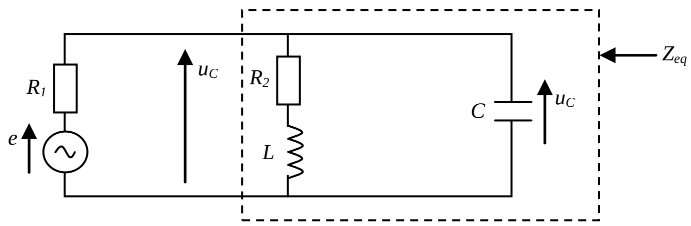


Fig.I.3. Exemple d'application du pont diviseur de tension sur des impédances.

En appliquant le théorème du pont diviseur de tension sur les impédances R_1 et Z_{eq}, on obtient:

$$\underline{u_C} = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R_1} \underline{e}$$

où $\underline{e}$ est la représentation complexe de la tension sinusoïdale e:

$$\underline{e} = E\ e^{j\theta}.$$

Z_{eq} est donnée par:

$$Z_{eq} = R_1 + \left(Z_C//(R_2 + Z_L)\right)$$

avec: $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ et $Z_L = j\omega L$

I.2. Pont diviseur de courant:

Ce théorème s'applique aux branches qui contiennent des résistances et/ou des impédances en parallèle comme il est montré dans la figure I.4.

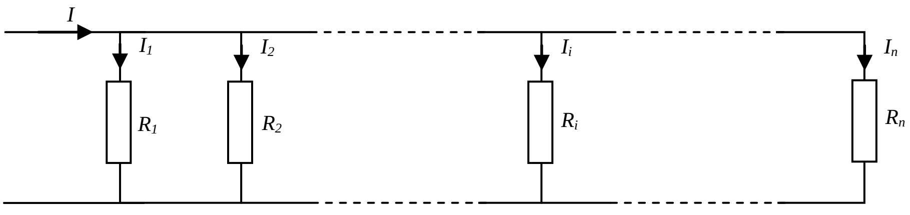


Fig.I.4. Application du pont diviseur de courant sur des résistances ou des impédances en parallèle.

Le courant I_i traversant la résistance R_i placée en parallèle avec les résistances R_1, R_2, ... et R_n, est donné par:

$$I_i = \frac{\frac{1}{R_i}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j}} I$$

où I est le courant alimentant le circuit parallèle constitué par les n résistances.

Exemple :

Exprimer les courants I_1 et I_2 en fonction de la tension continue E et des résistances r, R_1, R_2 et R_3.

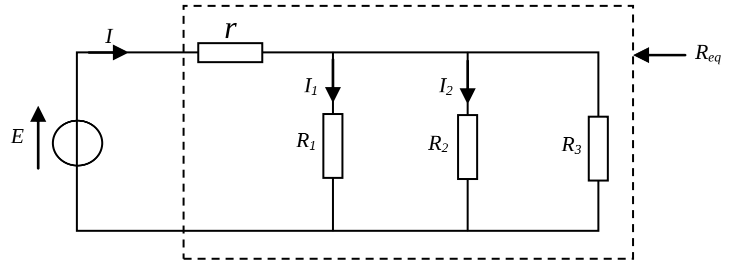


Fig.I.5. Exemple d'application du pont diviseur de courant sur des résistances en parallèle.

En appliquant la loi d'Ohm, le courant I s'écrit:

$$I = \frac{E}{R_{eq}},$$

où R_{eq} est la résistance équivalente au circuit encadré, tel que:

$$R_{eq} = r + (R_1//R_2//R_3)$$

Puisque les résistances R_1, R_2 et R_3 sont en parallèle, alors on obtient après application de théorème de pont diviseur de courant:

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} I$$

en remplaçant le courant I dans l'expression de I_1, on obtient:

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} \frac{E}{R_{eq}}$$

I.3. Théorème de superposition:

Il s'applique aux circuits comportant des sources indépendantes (au moins deux sources indépendantes de tension et/ou de courant). Soit un circuit électrique qui comporte n sources indépendantes: S_1, S_2, ..., S_n. On souhaite calculer une grandeur électrique (un courant I traversant une branche ou une tension V aux bornes d'un élément). Appelons I_1(ou V_1), I_2(ou V_2), ...et I_n(ou V_n) les valeurs de I(ou V) crées individuellement par chaque source Sj agissant seule. Les autres source étant passivées (la source de tension étant remplacée par un fil conducteur et la source de courant étant enlevée). Le courant I(ou la tension V) est la sommes algébriques des courants Ij (ou des tension Vj).

Exemple:

Donner l'expression du courant I qui traverse la résistance R.

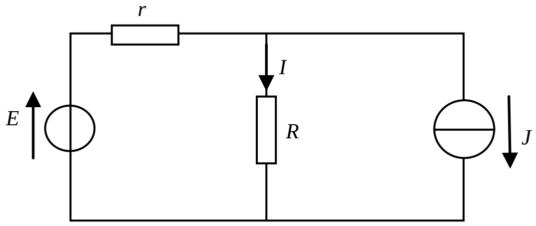
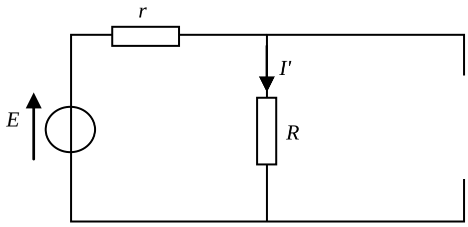


Fig.I.6. Exemple d'application de théorème de superposition.

Etape 1: calcul de I lorsque J=0.

Soit I' le courant dans la branche contenant R lorsque la source indépendante J est passivée (enlevée).

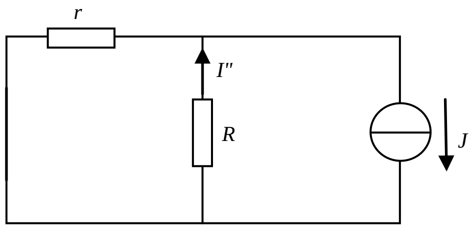


Il est évident que:

$$I' = \frac{E}{r+R}$$

Etape 2: calcul de I lorsque E=0.

Soit I'' le courant dans la branche contenant R lorsque la source indépendante E est passivée (court-circuitée).



En appliquent le théorème du pont diviseur de courant, on peut écrire:

$$I" = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{r}} J$$

Etape 3:

Le courant I est la somme algébrique des courants I' est I'', soit:

$$I = +I' - I"$$

Le signe "-" de I'' indique que ce dernier traverse R dans le sens opposé de I.

Finalement, on obtient:

$$I = \frac{E}{r+R} - \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{r}} J$$

I.4. Théorème de Thévenin:

Un circuit linéaire placé entre deux points A et B, peut être remplacée par un générateur équivalent de Thévenin E_{th} en série avec une résistance (ou impédance) interne de Thévenin R_{Th}.

- E_{Th} est égale à la tension à vide (charge déconnectée) mesurée entre les deux points A et B.
- R_{Th} est la résistance vue entre les deux bornes A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées (la source de tension est court-circuitée et la source de courant est enlevée).

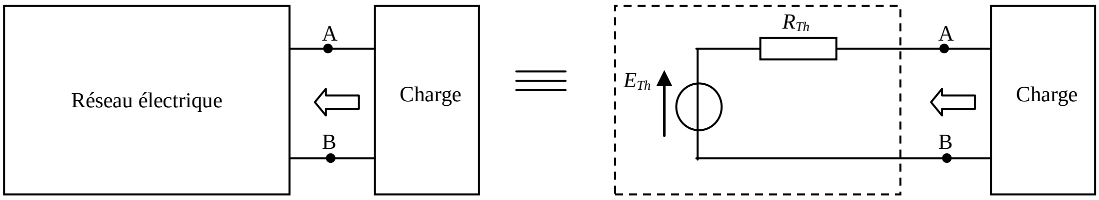


Fig.I.7. Circuit de Thévenin équivalent à un circuit életrique.

Exemple:

On cherche à étudier le circuit composé de deux sources de tension indépendantes et des résistances. On cherche la source de Thévenin équivalente entre les noeuds A et M.

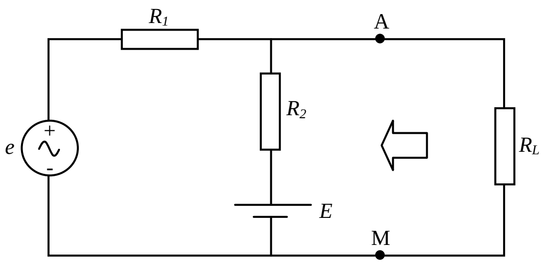
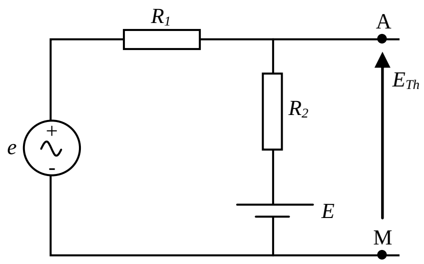


Fig.I.7. Exemple d'application de théorème de Thévenin.

Etape 1: calcul de E_{Th} à vide.

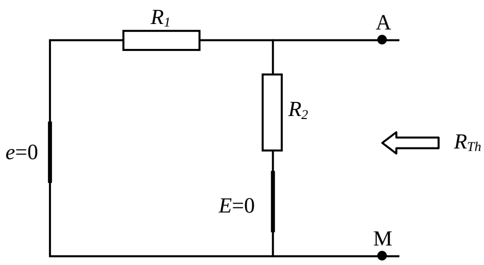
On remarque sur le schéma ci-après qu'on peut directement appliquer le théorème de Millman, donc:

$$E_{Th} = \frac{\frac{e}{R_1}+\frac{E}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$



Etape 2: calcul de R_{Th} vue par la charge R_L lorsque toutes les sources e et E sont court-circuitées, on obtient alors:

$$R_{Th} = R_1 // R_2$$



I.5. Théorème de Norton:

Un circuit linéaire placé entre deux points A et B, peut être remplacé par un générateur de courant I_N en parallèle avec une résistance (ou impédance) interne R_N.

- I_N est le courant entre A et B dans un court-circuit.
- RN est calculée de la même manière que la résistance de Thévenin.

Exemple:

Soit à déterminer le schéma de Norton équivalent aux dipôle AB de la figure I.8.

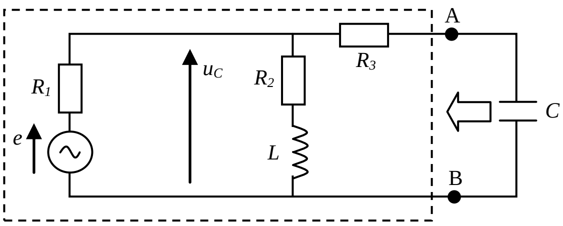
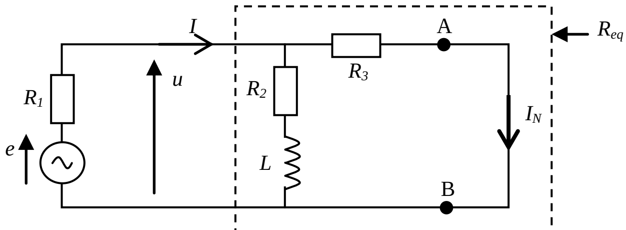


Fig.I.7. Exemple d'application de théorème de Norton.

Etape1: calcul du courant de court-circuit I_N.



Nous constatons que R_1 est en série avec R_{eq}, donc:

$$\underline{I} = \frac{\underline{e}}{R_1 + R_{eq}}$$

avec:

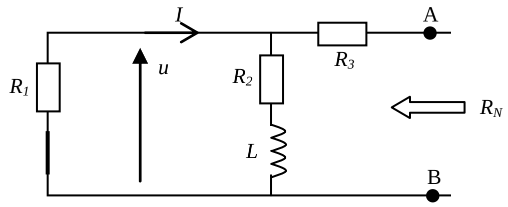
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + j\omega L}}$$

La résistance R_3 est en parallèle avec les éléments R_2 et Z_L. On peut donc appliquer le théorème du pont diviseur de courant.

$$\underline{I_N} = \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + j\omega L}} \underline{I}$$

Etape2: calcul de la résistance de Norton.

Pour ce faire, on doit passiver la source de tension e et calculer la résistance vue des points A et B.



$$R_N = R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L}}$$

I.6. Théorème de Millman:

Soit n branches associées en parallèle, comprenant chacune un circuit linéaire qui peut être remplacé par son schéma équivalent de Thevenin (Source de tension avec résistance ou impédance interne).

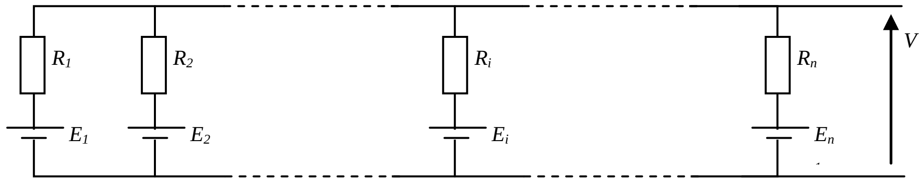


Fig.I.8. Application du théorème de Millman sur des branches en parallèle comprenant chacune une source de tension et une impédance.

La tension V s'écrit:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}}$$

Exemple:

On considère le circuit électrique donné par la figure I.9. On demande de calculer la tension aux bornes de la résistance R_5.

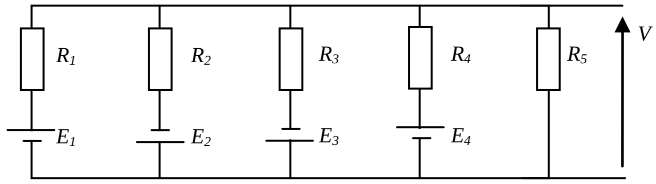


Fig.I.9. Exemple d'application du théorème de Millman.

En appliquant directement le théorème de Millman, on obtient:

$$V = \frac{+\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_4}{R_4} + \frac{0}{R_5}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$

I.7. Théorème de Kennelly:

Le théorème de Kennelly permet d'établir une équivalence entre des impédances placées en triangle et des impédances placées en étoiles.

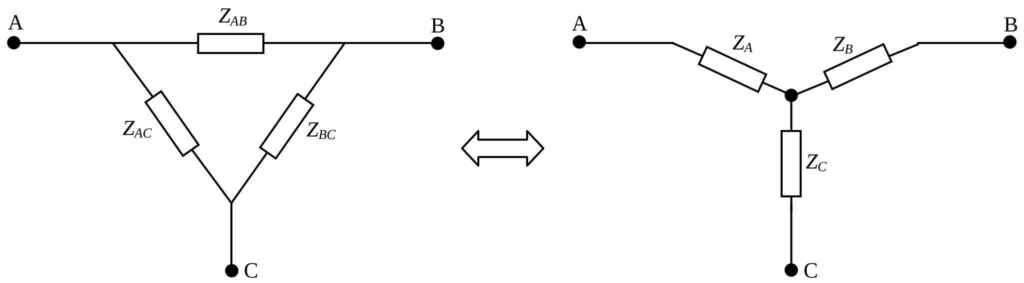


Fig.1.10. A gauche:montage triangle. A droite: montage étoile.

Conversion triangle-étoile

La résistance d'une branche de l'étoile équivalente est égale au produit des résistances adjacentes divisé par la somme totale des résistances.

$$Z_A = \frac{Z_{AB} Z_{AC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

$$Z_B = \frac{Z_{AB} Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

$$Z_C = \frac{Z_{AC} Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

Conversion étoile-triangle

La résistance d'une branche du triangle équivalent est égale à la somme des produits des résistances, divisée par la résistance de la branche opposée.

$$Z_{AB} = \frac{Z_{AB} Z_{AC} + Z_{AB} Z_{BC} + Z_{AC} Z_{BC}}{Z_C}$$

$$Z_{AC} = \frac{Z_{AB} Z_{AC} + Z_{AB} Z_{BC} + Z_{AC} Z_{BC}}{Z_B}$$

$$Z_{BC} = \frac{Z_{AB} Z_{AC} + Z_{AB} Z_{BC} + Z_{AC} Z_{BC}}{Z_A}$$

Exemple :

On désire déterminer la résistance du dipôle de la figure I.11.

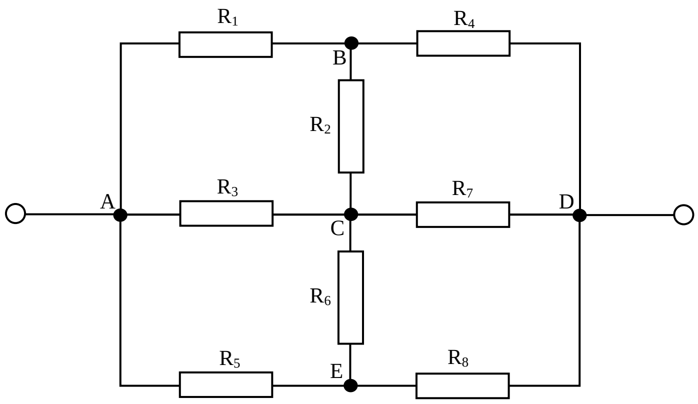
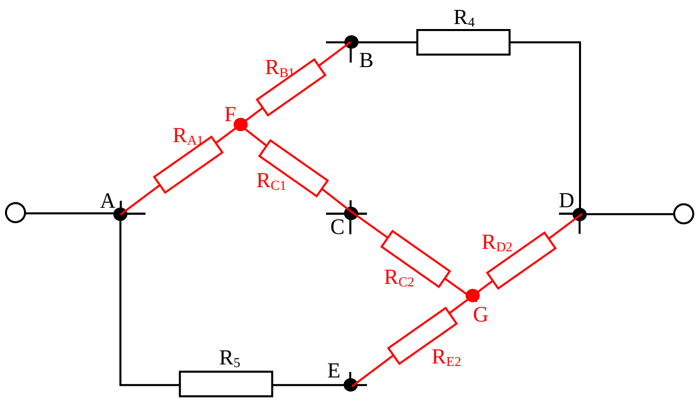


Fig.1.11. Exemple de calcul de la résistance d'un dipôle en utilisant le théorème de Kennelly.

On commence par transformer les deux montages triangle ABC et CDE en montages étoiles.

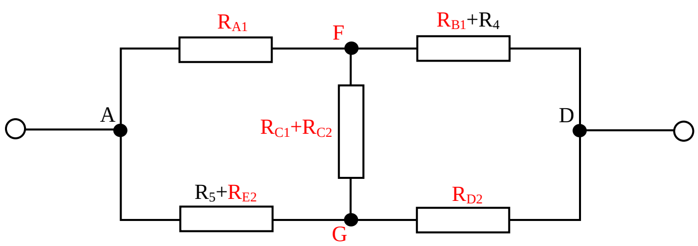


avec:

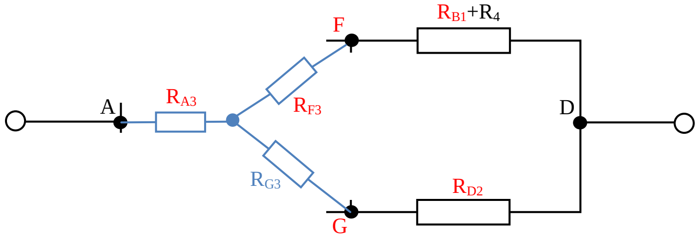
$$R_{A1} = \frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}; R_{B1} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}; R_{C1} = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

$$R_{C2} = \frac{R_6R_7}{R_6+R_7+R_8}; R_{D2} = \frac{R_7R_8}{R_6+R_7+R_8}; R_{E2} = \frac{R_6R_8}{R_6+R_7+R_8}$$

Le montage est simplifié en deux montages triangles.



Une seule transformation triangle-étoile suffit dans ce cas.



Il est clair maintenant que la résistance du dipôle s'écrit sous la forme:

$$R_{dipôle} = R_{A3} + \left(R_{F3} + (R_{B1} + R_4)\right)//(R_{G3} + R_{D2})$$

avec:

$$R_{A3} = \frac{R_{A1}(R_5 + R_{E2})}{R_{A1} + (R_{C1} + R_{C2}) + (R_5 + R_{E2})}$$

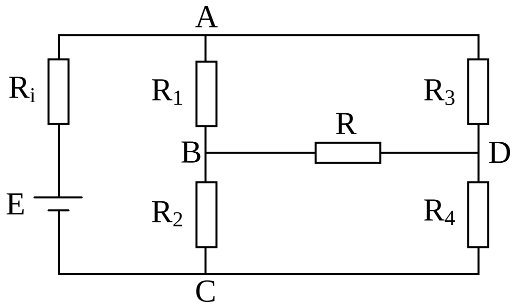
$$R_{F3} = \frac{R_{A1}(R_{C1} + R_{C2})}{R_{A1} + (R_{C1} + R_{C2}) + (R_5 + R_{E2})}$$

$$R_{G3} = \frac{(R_{C1} + R_{C2})(R_5 + R_{E2})}{R_{A1} + (R_{C1} + R_{C2}) + (R_5 + R_{E2})}$$

Solutions des exercices de la série N°1:

Exercice N°1:

Dans le circuit suivant indiquer le nombre de nœuds, le nombre de branches et le nombre de mailles.



Réponse:

Une **branche** d'un réseau est un ensemble de dipôles reliés en série.

Un **nœud** d'un réseau est un point commun à au moins trois branches.

Une **maille** d'un réseau est un ensemble de branches formant un circuit fermé dans lequel chaque nœud n'est rencontré qu'une fois.

Selon le schéma donné, on a:

- 4 nœuds: A, B, C et D.
- 6 branches: AC(qui contient R_i et E), AB(qui contient R_1), BC(qui contient R_2), AD(qui contient R_3), BD(qui contient R) et CD(qui contient R_4).
- 7 mailles: ACA, ABDA, BDCB, ACBDA, ABDCA, ABCDA et ADCA.
- 3 mailles indépendantes ou essentielles: ACA, ABDA, BDCB.

Exercice N°2:

1) Utiliser le théorème de diviseur de tension pour exprimer U_1 et U_2 en fonction de **e** et des résistances.

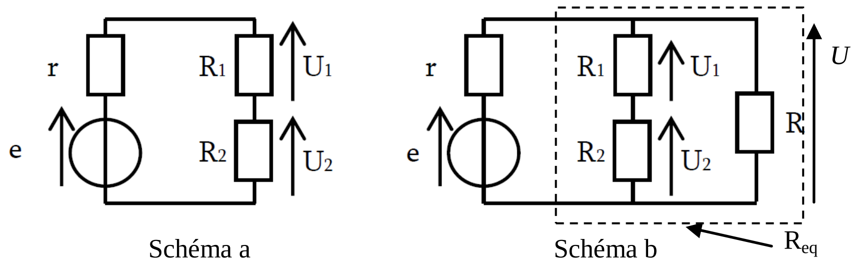


Schéma a:

Les résistances r, R1 et R2 sont en série. Cela nous permet d'appliquer le théorème du pont diviseur de tension.

$$U_1 = \frac{R_1}{r+R_1+R_2}e;$$

$$U_2 = \frac{R_2}{r+R_1+R_2}e$$

Schéma b:

Appelons *U* la tension aux bornes de la résistance *R* et appliquons le théorème de diviseur de tension sur les résistances R_1 et R_2.

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

On remarque que la résistance *r* est en série avec la résistance équivalente R_{eq} donnée par:

$$R_{eq} = R//(R_1 + R_2)$$

On applique pour la deuxième fois le diviseur de tension, on obtient:

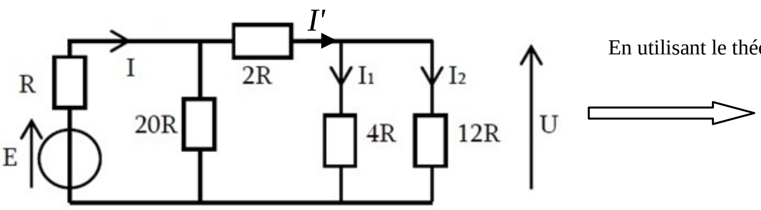
$$U = \frac{R_{eq}}{r + R_{eq}} e$$

En remplaçant *U* dans les expressions de U_1 et U_2, on obtient:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_{eq}}{r + R_{eq}} e$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_{eq}}{r + R_{eq}} e$$

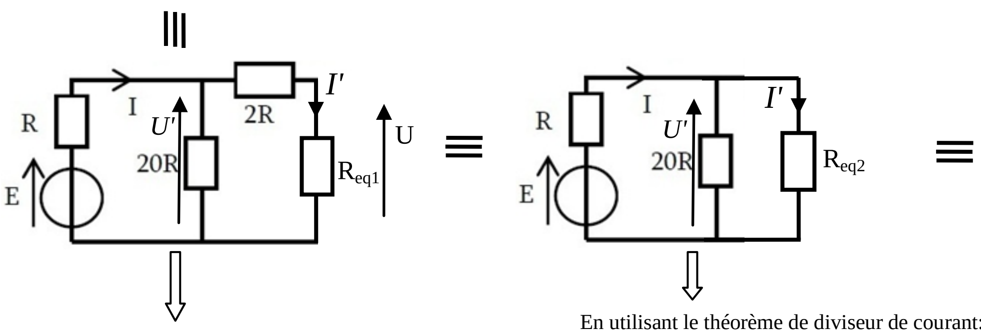
2) Utiliser le théorème de diviseur de tension et le théorème de diviseur de courant pour déterminer les expressions des grandeurs I, U, I_1 et I_2.



En utilisant le théorème de diviseur de courant:

$$I_1 = \frac{\frac{1}{4R}}{\frac{1}{4R} + \frac{1}{12R}} I' \quad (1.1)$$

$$I_2 = \frac{\frac{1}{12R}}{\frac{1}{4R} + \frac{1}{12R}} I' \quad (1.2)$$



En utilisant le théorème de diviseur de tension:

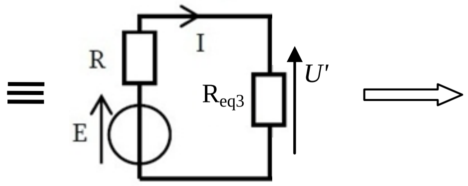
$U = \frac{R_{eq1}}{R_{eq1} + 2R} U'$ (2)

où: $R_{eq1} = (4R)//(12R) = 3R$

En utilisant le théorème de diviseur de courant:

$I' = \frac{\frac{1}{R_{eq2}}}{\frac{1}{R_{eq2}} + \frac{1}{20R}} I$ (3)

où: $R_{eq2} = 2R + R_{eq1} = 5R$



En utilisant le théorème de diviseur de tension:

$U' = \frac{R_{eq2}}{R_{eq2}+R}E$ (4)

où: $R_{eq3} = (20R)//R_{eq2} = 4R$

En appliquant la loi d'Ohm: $I = \frac{E}{R+R_{eq3}}$ (5)

En remplaçant (5) dans (3): $I' = \frac{\frac{1}{R_{eq2}}}{\frac{1}{R_{eq2}}+\frac{1}{20R}} \frac{E}{R+R_{eq3}}$ (6)

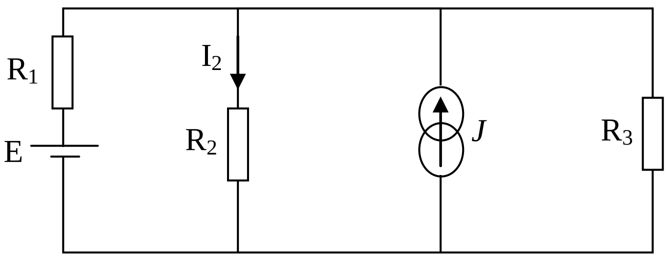
En remplaçant (6) dans (1.1): $I_1 = \frac{\frac{1}{4R}}{\frac{1}{4R}+\frac{1}{12R}} \frac{\frac{1}{R_{eq2}}}{\frac{1}{R_{eq2}}+\frac{1}{20R}} \frac{E}{R+R_{eq3}}$

En remplaçant (6) dans (1.2): $I_2 = \frac{\frac{1}{12R}}{\frac{1}{4R}+\frac{1}{12R}} \frac{\frac{1}{R_{eq2}}}{\frac{1}{R_{eq2}}+\frac{1}{20R}} \frac{E}{R+R_{eq3}}$

En remplaçant (4) dans (2): $U = \frac{R_{eq1}}{R_{eq1}+2R} \frac{R_{eq2}}{R_{eq2}+R} E$

Exercice N°3:

En utilisant le théorème de superposition, donner l'expression du courant I_2.



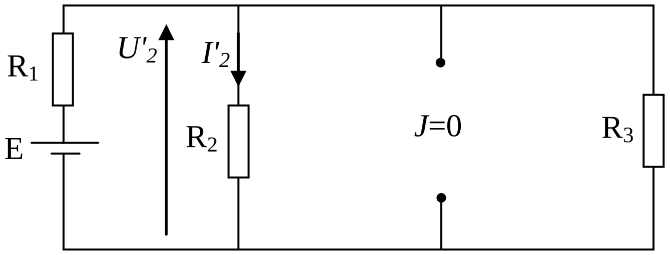
Le courant I_2 est égale à la somme algébrique des courants I_2 crées par chaque source indépendante prise isolément, en désactivant toutes les autres sources indépendantes (sources de tension remplacées par des court-circuits et sources de courant par des circuits ouverts):

$$I_2 = I'_2(J = 0) + I"_2(E = 0)$$

si par exemple le courant $I"_2$ est choisit dans le sens opposé de I_2, nous écrivons:

$$I_2 = I'_2(J = 0) - I"_2(E = 0)$$

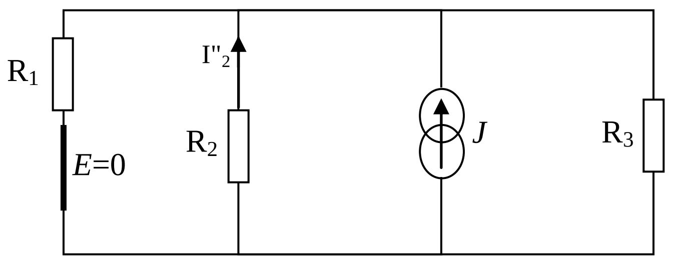
a) Calcul de I'_2:



En appliquant le diviseur de tension: $U'_2 = \frac{R_{eq}}{R_{eq}+R_1}E$, où : $R_{eq} = R_2//R_3$

En appliquant la loi d'Ohm: $I'_2 = \frac{U'_2}{R_2}$. On obtient alors: $I'_2 = \frac{1}{R_2} \frac{R_2//R_3}{(R_2//R_3)+R_1} E$

b) Calcul de I''_2:



Puisque R_1, R_2 et R_3 sont en parallèle, on peut donc utiliser le diviseur de courant:

$$I''_2 = -\frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}J$$

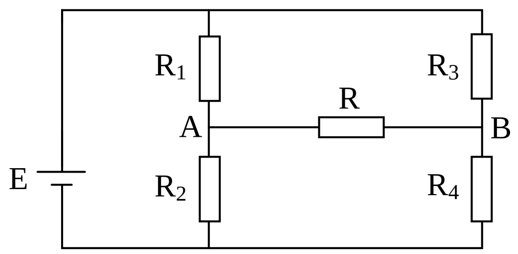
c) Calcul de courant I_2:

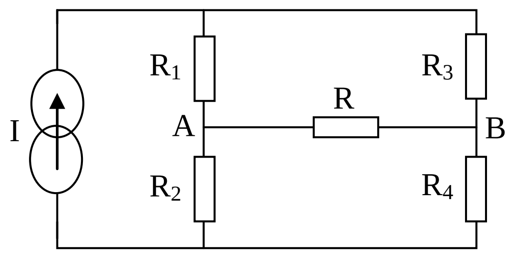
Le courant I_2 est la somme algébrique des courant I'_2 et I''_2:

$$I_2 = +I'_2 - I''_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{R_2}\frac{R_2//R_3}{(R_2//R_3)+R_1}E + \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}J$$

<u>Exercice N°4:</u>

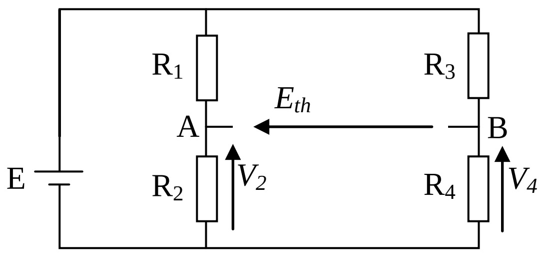
Donner les schémas de Thévenin équivalents aux deux circuits ci dessus entre les points A et B.





1) Premier schéma:

1.1) Tension de Thévenin: La charge R doit être débranchée.



En appliquant la loi des mailles: $E_{Th} = V_2 - V_4$

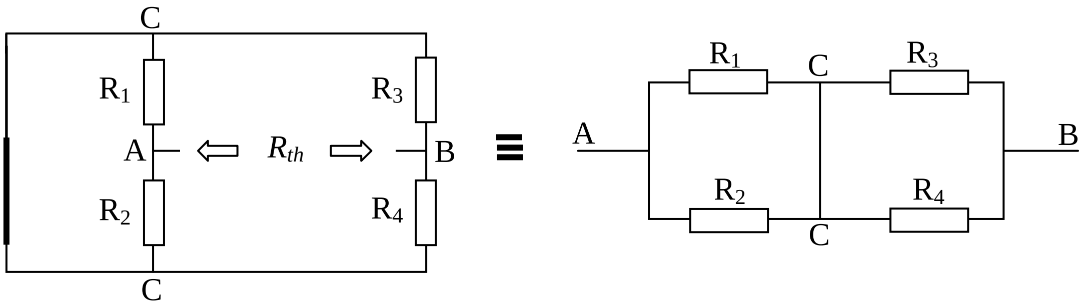
En appliquant le diviseur de tension:

$V_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}E$ et $V_4 = \frac{R_4}{R_3+R_4}E$

donc: $E_{Th} = \frac{R_2}{R_1+R_2}E - \frac{R_4}{R_3+R_4}E = \frac{R_2R_3-R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}$

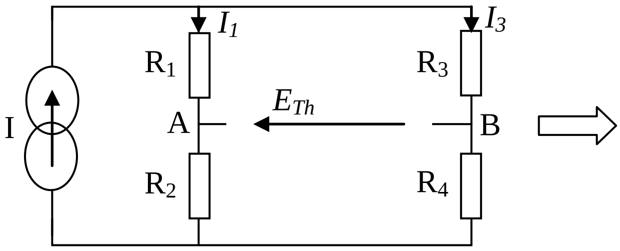
1.2) Résistance de Thévenin:

Dans ce cas tous les générateurs indépendants doivent être passivés. Dans cet exemple, la source de tension indépendante E doit être court-circuitée.



Il en résulte: $R_{Th} = (R_1//R_2) + (R_3//R_4)$

2) deuxième schéma:
2.1) Tension de Thévenin:



En appliquant le diviseur de courant:

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R_1+R_2}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}} I \qquad (1)$$

$$I_3 = \frac{\frac{1}{R_3+R_4}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}} I \qquad (2)$$

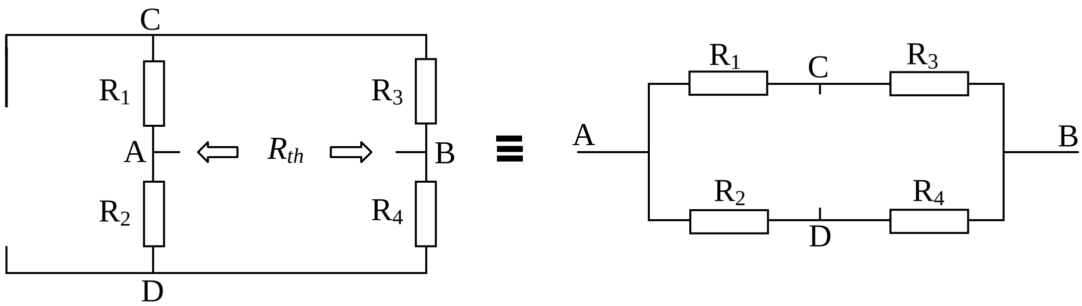
En appliquant la loi des mailles: $E_{Th} = V_2 - V_4 = R_2 I_1 - R_4 I_3$ (3)

Remplaçant maintenant les équations (1) et (2) dans (3):

$$E_{Th} = R_2 \frac{\frac{1}{R_1+R_2}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}} I - R_4 \frac{\frac{1}{R_3+R_4}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}} I$$

=> $E_{Th} = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4} I$

2.2) Résistance de Thévenin:
Dans cet exemple, la source de courant indépendante *I* doit être enlevée.



$$R_{Th} = (R_1 + R_3)//(R_2 + R_4)$$