LA MODULATION DE FREQUENCE (FM)

FORMULATION MATHEMATIQUE ET PROPRIETES SPECTRALES

Cette fois c'est la fréquence qui est une fonction du signal .
On serait tenté d'écrire : $v = a.\cos[\cos(\omega_0 + s(t))t]$

mais ceci est incorrect. En effet : $v = a.\cos\theta(t)$ avec $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \omega_0 + k.s(t)$ c'est à dire

$$\boxed{v = a.\cos[\omega_0 t + k\int_0^t s(t)]}$$

Si le signal modulant est sinusoïdal $\omega = \omega_0 + \Delta\omega.\cos\Omega t$,$\Delta\omega$ est l'excursion de fréquence c'est l'amplitude du signal modulant et Ω est sa fréquence

La phase instantanée est alors : $\theta = \omega_0 t + \dfrac{\Delta\omega}{\Omega}.\sin\Omega t$. Le quotient $m = \dfrac{\Delta\omega}{\Omega}$ est appelé indice de modulation , il joue un rôle essentiel

L'expression exacte d'une porteuse modulée en amplitude par un signal sinusoïdal est alors :

$$\boxed{v = a.\cos[\omega_0 t + m\sin\Omega t]}$$

Largeur de spectre règle de Carson

Cette règle est obtenue par un raisonnement intuitif simple.

Si la fréquence du signal de modulation est très faible on peut admettre qu'a chaque instant le signal est sinusoïdal et sa fréquence comprise dans l'intervalle $\omega_0 \pm \Delta\omega$ Avec un analyseur de spectre on verrait une raie qui se déplacerait avec une fréquence $\dfrac{\Omega}{2\pi}$ dans cet intervalle . Toute l'énergie portée par le signal est donc comprise dans un intervalle de fréquence de largeur $2\Delta\omega$ centré sur la porteuse

Si maintenant la fréquence Ω augmente , la modulation étant une opération non linéaire , il est naturel de penser que la zone précédente s'élargit et par exemple que les fréquences s'ajoutent ; l'énergie est alors contenue dans une bande de largeur $2(\Delta\omega+\Omega)$.Ce résultat n'est qu'approché mais reflète assez bien la réalité comme nous allons maintenant le voir .

Raies latérales en modulation de fréquence

Le développement de l'expression précédente s'obtient en utilisant les relations suivantes :

$$\cos(m.\sin a) = J_0(m) + 2J_2(m).\cos.2a + 2J_4(m).\cos.4a + ...$$

$$\sin(m.\sin a) = 2J_1(m)\sin.a + 2J_3(m).\sin 3a + ...$$

Les J étant des fonctions de Bessel de première espèce .

Appliquées à l'expression de v ces relations conduisent à :

$$v = a.\begin{bmatrix} J_0(m).\cos\omega_0 t + J_1(m).\lfloor\cos(\omega \;\; - \Omega)t - \cos(\omega_0 + \Omega)t\rfloor + \\ J_2(m).[\cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ J_3(m).[\cos(\omega_0 - 3\Omega)t - \cos(\omega_0 + 3\Omega)t.] + ... \end{bmatrix}$$

On voit apparaître de part et d'autre de la porteuse , qui à pour amplitude $J_0(m)$, des raies latérales multiples à des fréquences $\omega_0 \pm k\Omega$ dont les amplitudes sont les valeurs des fonctions de Bessel successives pour l'indice m .

Considérons deux exemples , d'abord m=1 c'est à dire $\Delta\omega=\Omega$ les amplitudes des raies sont données dans le tableau ci contre , on notera que les amplitudes sont négligeables au delà de la seconde raie latérale de fréquence $\omega_0\pm2\Omega$, c'est bien ce que prévoyait la règle de Carson ($\Delta\omega+\Omega=2\Omega$).

m=1

fréquence	Amplitude	
ω_0	$J_0(1)$	0,765
$\omega_0\pm\Omega$	$J_1(1)$	0,44
$\omega_0\pm2\Omega$	$J_2(1)$	0,11
$\omega_0\pm3\Omega$	$J_3(1)$	0,02
$\omega_0\pm4\Omega$	$J_4(1)$	0,002

M=5

fréquence	Amplitude	
ω_0	$J_0(5)$	-0,177
$\omega_0\pm\Omega$	$J_1(5)$	-0,132
$\omega_0\pm2\Omega$	$J_2(5)$	0,04
$\omega_0\pm3\Omega$	$J_3(5)$	0,36
$\omega_0\pm4\Omega$	$J_4(5)$	0,39
$\omega_0\pm5\Omega$	$J_5(5)$	0,26
$\omega_0\pm6\Omega$	$J_6(5)$	0,13
$\omega_0\pm7\Omega$	$J_7(5)$	0,05
$\omega_0\pm8\Omega$	$J_8(5)$	0,02
$\omega_0\pm9\Omega$	$J_9(5)$	0,005

De même si m=5, l'amplitude diminue brutalement à partir de la sixième raie. ($\Delta\omega+\Omega=6\Omega$).

On notera que les amplitudes ne décroissent pas régulièrement, certaines peuvent même disparaître , d'autre part à la différence de la modulation d'amplitude la porteuse ne conserve pas son amplitude .

Note

Pour n entier positif la fonction de Bessel d'ordre n a pour développement en série :

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!.(n+k)!}$$

Soit $J_0(x)=1-x^2/2+\ldots$

$J_1(x)=x/2-\ldots$ $J_2(x)=x^2/8-\ldots$

Modulation à faible indice

Si m est petit J0(m)+1 et J1(m)=m/2 et les autres fonctions de Bessel sont négligeables. Alors le signal modulé à pour expression :

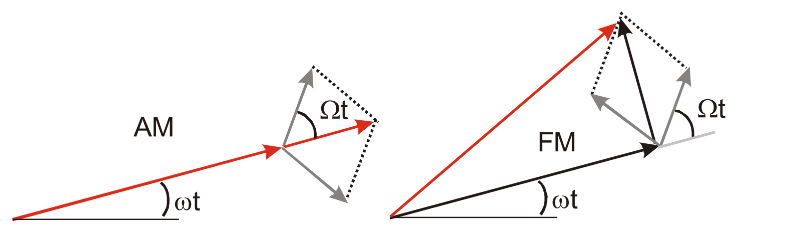
$$v(t)=a\left[\cos.\omega_0 t+\frac{m}{2}\left[\cos(\omega_0-\Omega)t-\cos(\omega_0+\Omega)t\right]\right]$$

qui ressemble beaucoup à ce que nous avons obtenu en modulation d'amplitude à un signe près.

En AM nous avions en effet : $v(t)=a\left[\cos.\omega_0 t+\frac{m}{2}\left[\cos(\omega_0-\Omega)t+\cos(\omega_0+\Omega)t\right]\right]$

Les diagrammes de Fresnel correspondants montrent parfaitement la différence . En modulation AM les deux vecteurs auxiliaires d'amplitude m/2 sont symétriques par rapport au vecteur porteuse et la somme totale est un vecteur colinéaire avec cette porteuse. Le vecteur de Fresnel tourne régulièrement , seule son amplitude varie. En FM la somme des deux vecteurs auxiliaires est perpendiculaire au vecteur porteuse . L'extrémité du vecteur total se balance de part et d'autre du vecteur porteuse .

Vecteurs de Fresnel pour les modulations AM et FM faible indice .



LES METHODES DE MODULATION FM

Il est très difficile de moduler en fréquence une porteuse existante (En optique et pour un très faible indice la réflexion sur un miroir mobile provoque par effet Doppler une modulation de fréquence) Il est par contre facile d'agir sur la fréquence d'un oscillateur qui n'est pas autre chose qu'un VCO .

DETECTION DE LA MODULATION DE FREQUENCE

Il y a trois méthodes possibles:

Transformation de la FM en AM par un circuit dont le gain varie en fonction de la fréquence , puis détection AM .

Utilisation d'une boucle de phase

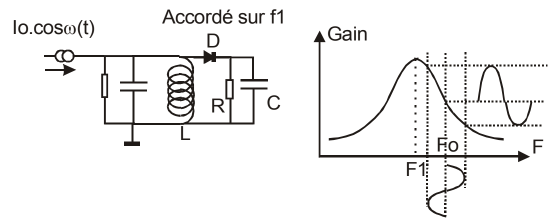
Détection par comptage .

Les discriminateurs

L'idée de base est d'utiliser le flanc d'une courbe de résonance .

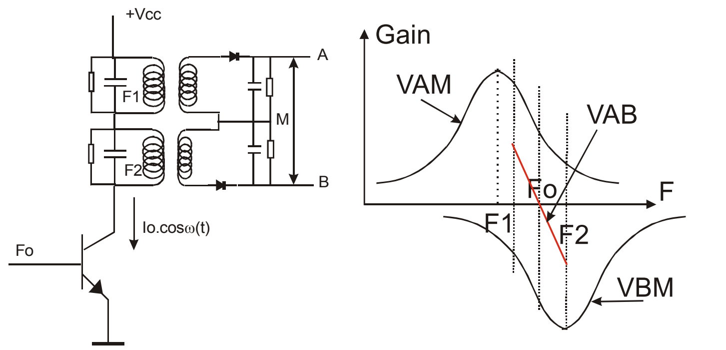
Si un courant d'amplitude constante mais de fréquence variable autour d'une valeur centrale f_0 est appliqué à un circuit résonant accordé sur f_1 voisine de f_0 , l'amplitude du signal de sortie est modulé en amplitude . La figure ci contre montre cependant clairement que la variation d'amplitude n'est pas proportionnelle à l'écart de fréquence sauf pour une excursion très faible devant la largeur de bande du circuit .

Détection FM sur le flanc d'une courbe de résonance .



Pour obtenir une réponse plus linéaire on peut faire appel à deux circuits résonants accordés sur des fréquences différentes et montés tête bêche . C'est le principe du **discriminateur de Travis** représenté ci dessous .

Discriminateur de Travis

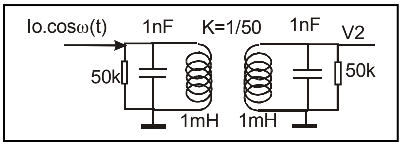


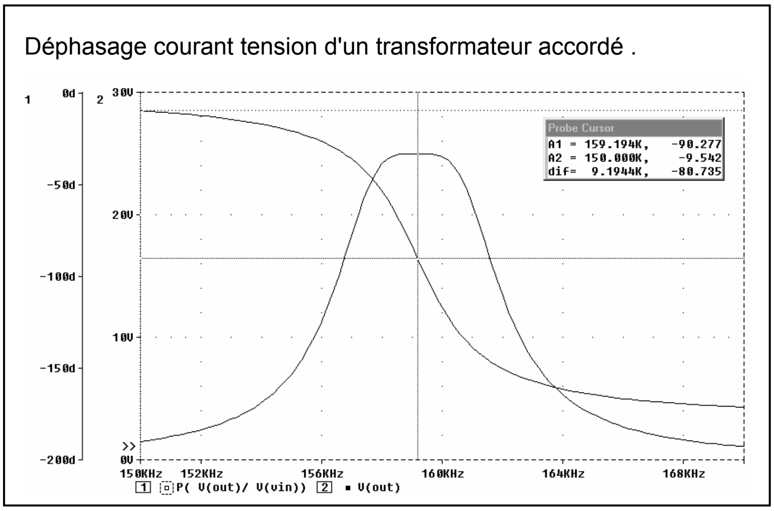
Les deux circuits sont attaqués en série par un courant d'amplitude constante mais modulé en fréquence autour d'une porteuse f_o. Ils sont accordés respectivement sur deux fréquences f_1 et f_2 situées de part et d'autre de f_0 . Les tensions détectées V_{AM} et V_{BM} varient en fonction de f comme les courbes des deux circuits, la tension de sortie V_{AB} est la différence de ces deux tensions. Par différence les non linéarités des deux courbes se compensent partiellement autour de la fréquence centrale f_0. . Le meilleur résultat est obtenu lorsque F_1-F_2=1,5fo/Q où Q est le coefficient de qualité des deux circuits. Ce montage ne fonctionne correctement que si l'attaque des deux circuits est effectuée avec une source de très forte impédance interne (source de courant , le plus souvent un transistor bipolaire en montage base commune) , sinon il y a synchronisation et les deux courbes de réponse se retrouvent centrées sur f_0.

Le discriminateur de Travis de réglage assez difficile pratiquement abandonné actuellement .

Il existe de nombreux autres schémas de discriminateurs , les plus connus effectuent une double transformation fréquence ⇒ phase puis phase ⇒ amplitude .

Au voisinage de l'accord le déphasage entre les tensions primaire et secondaire d'un transformateur à primaire et secondaire accordés au couplage critique , attaqué par une source de courant , varie linéairement en fonction de la fréquence. C'est ce que montre la courbe ci contre .





Autour de la fréquence centrale le déphasage secondaire primaire a pour expression

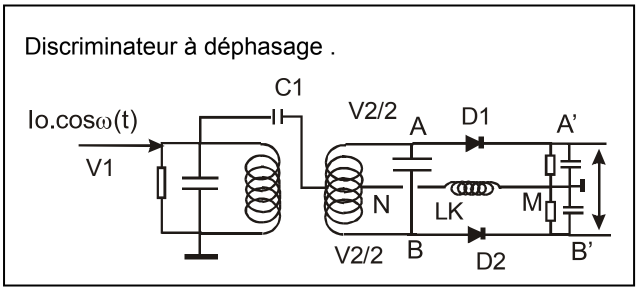
$$tg\varphi = \frac{\frac{R}{Q^2}}{L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}}$$

Si l'on pose $\frac{f}{f_0} = x = 1 + \varepsilon$

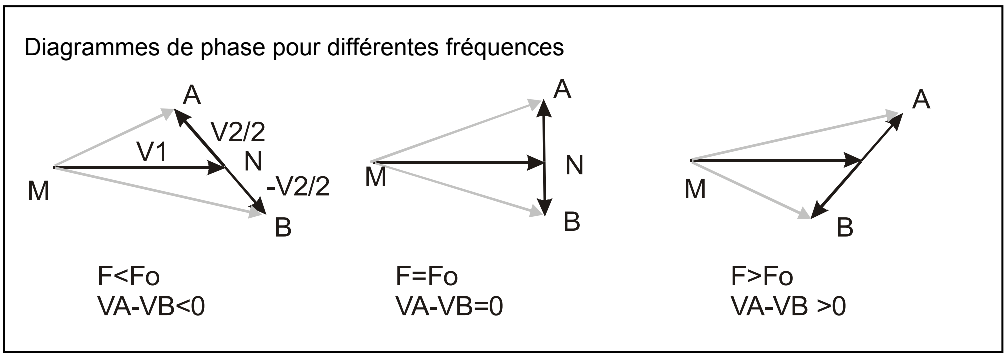
et ε petit devant 1 :

$$tg\varphi = \frac{1}{2Q\varepsilon} \rightarrow et \rightarrow \cos\varphi \cong 2Q\varepsilon$$

Un phasemètre semblable à ceux que nous avons décrit dans le chapitre consacré à la boucle de phase fournit un signal de sortie en cosφ proportionnel à l'écart de fréquence qui est donc le signal modulant cherché. Le montage représenté sur la figure ci dessous remplit cette fonction. Le condensateur C_1 est un condensateur de liaison qui transmet au point N la tension primaire V_1 . Ce point est en continu au potentiel zéro mais isolé de la masse en HF par la self de forte valeur (self de choc LK)

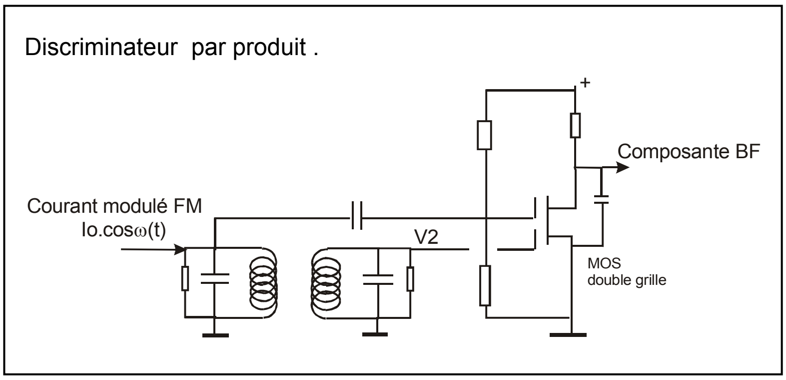


La diode D_1 fournit entre A' et M une tension égale à l'amplitude de la tension HF entre A et M soit $V_1+V_2/2$ (N est au milieu de l'enroulement secondaire) La diode D2 fournit entre B' et M une tension égale à l'amplitude du signal HF entre B et M soit $V_1-V_2/2$ .Si la fréquence du signal d'entrée est égale à la fréquence d'accord des deux circuits V_1 et V_2 sont en quadrature , alors $V_{A'M}=V_{B'M}$ et la tension entre A' et B' est nulle . Pour une fréquence différente V_1 et V_2 ne sont plus en quadrature et les deux tensions continues détectées entre A'et M et B'et M ne sont plus égale; leur différence n'est plus nulle .Si V_2 est faible devant V_1 un calcul que nous avons présenté plus haut montre que la tension recueillie entre A' et B' est proportionnelle au cosinus de l'angle de déphasage donc au signal modulant .

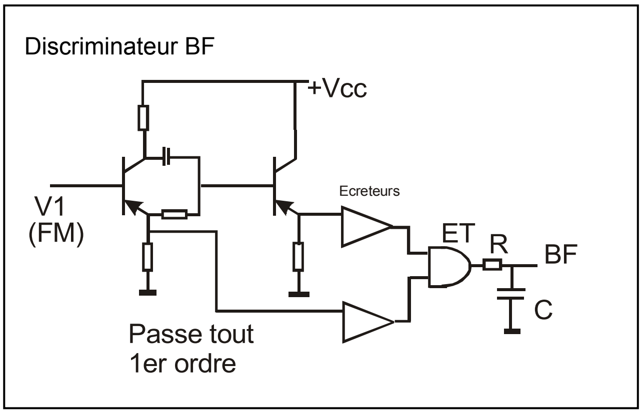


La phase peut être obtenue également en effectuant simplement le produit des tensions V_1 et V_2 .En effet $\cos\omega_0 t;\cos(\omega_0 t+\varphi)$ fournit par filtrage passe bas un terme directement proportionnel à l'écart de fréquence .

Cette multiplication peut être effectuée par n'importe quel composant non linéaire par exemple un MOS double grille comme le montre la figure. *



Le déphasage fonction de la fréquence peur être obtenu sans transformateur par exemple avec un filtre passe tout Cette solution peut être utile pour de grandes excursions de fréquence aux fréquences basses . Le montage ci contre est rendu insensible à l'amplitude en transformant les signaux en signaux numériques , le produit peut alors être effectué par un simple ET logique suivi d'un intégrateur .



Détection par PLL

C'est la solution la plus évidente et la plus couramment utilisée actuellement .

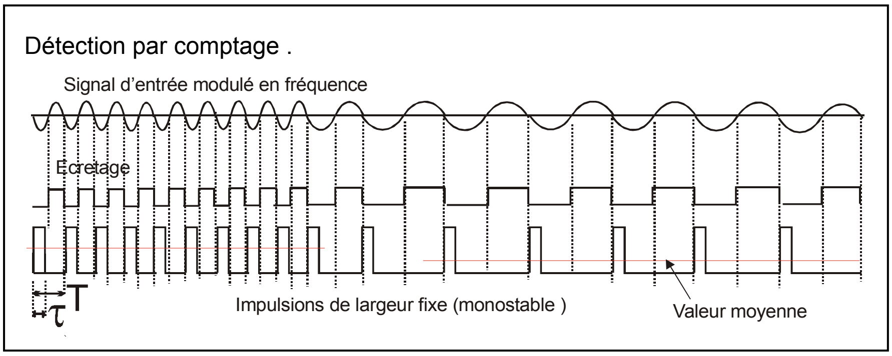
Soit f=fo+aV la fréquence du VCO , fo étant la fréquence de la porteuse La fréquence instantanée du signal modulé est fo+s(t) , si la constante de temps de la boucle est suffisamment faible pour qu'elle soit constamment accrochée :

fo+aV=fo+s(t) donc V=s(t)/a Le signal modulant est obtenu directement La linéarité de la détection est déterminée par celle de la loi de commande du VCO,la seule difficulté est d'obtenir une constante de temps de boucle très faible de façon que le VCO suive parfaitement la fréquence du signal de référence .

Détection par comptage

Cette méthode n'est applicable qu'aux fréquences faibles et pour de grandes variations relatives de fréquence .

Le signal modulé en fréquence est écrêté ,les flancs des signaux carrés obtenus déclenchent un monostable ,on obtient ainsi une suite d'impulsions de largeur fixe τ d'amplitude E à la fréquence du signal d'entrée. Si T est la période de ce dernier la valeur moyenne du signal obtenu est $E\tau/T$ c'est à dire $E\tau f$, elle est rigoureusement proportionnelle à la fréquence d'entrée.



Si Fo est la fréquence de la porteuse et Δf l'excursion de fréquence , la tension continue fournie à la sortie d'un intégrateur RC a comme amplitude maximale

EΔf/fo . Si on appliquait directement cette méthode sur le signal d'antenne fourni par un émetteur FM, fo=100Mhz et Δf=75kHz ,on obtiendrait pour E=5V un signal de 3,75 mV seulement avec sans doute un très mauvais rapport signal /bruit. Après changement de fréquence autour de 10Mhz le résultat est multiplié par 10 ce qui est encore insuffisant . En ramenant la porteuse à 500kHz l'excursion relative de fréquence est beaucoup plus grande 75/500 et le niveau de signal 5x75/500=750mV est exploitable .

Cette méthode de détection présente l'avantage d'être simple et parfaitement linéaire , elle est parfois utilisée par les casques infrarouge prévus pour l'écoute discrète de musique ou de la télévision.

LA MODULATION DE PHASE

Cette fois 'est la phase qui est modifiée au rythme du signal modulant :

$$v = a;\cos(\omega_0 t + ks(t))$$

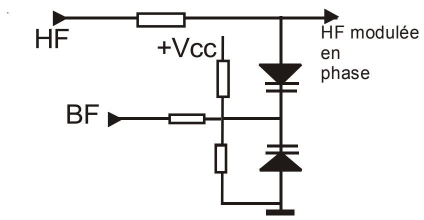
La phase instantanée est $(\omega_0 t + ks(t))$ donc la pulsation $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_O + k\frac{ds(t)}{dt}$

En comparant cette expression à celle rencontrée en modulation de fréquence on constate que **la modulation de phase est équivalente à une modulation de fréquence par la dérivée du signal .**

Tout ce qui a été dit pour la FM est donc valable ici. On regroupe d'ailleurs souvent ces deux modulations sous le qualificatif unique de **modulations angulaires** .

Il existe cependant un cas particulier lorsque l'écart de phase reste inférieur à 180° , dans ce cas la récupération du signal modulant peut être effectuée par une simple détection synchrone , et la modulation par un déphaseur équipé par exemple d'une diode à capacité variable . Avec le montage ci contre l'excursion de phase ne peut pas dépasser quelques dizaines de degrés autour de π/2

Modulateur de phase à varicap



LES MODULATIONS COMPLEXES

Nous désignons ainsi l'utilisation d'une sous porteuse et la double modulation en quadrature;

Utilisation d'une sous porteuse

L'exemple le plus simple est la transmission du son en stéréophonie sur la bande FM .

Pour reproduire l'impression de relief sonore deux microphones sont utilisés placés à gauche et à droite de la source (orchestre par exemple) , ils délivrent deux signaux BF que nous appèlerons G et D .Pour une bonne qualité (haute fidélité) leur bande de fréquence est étendue jusqu'à 15kHz. Cependant pour ne pas pénaliser un utilisateur qui n'est pas équipé pour la réception stéréo, les signaux qui sont transmis sont des combinaisons linéaires des précédents ; M=G+D , signal **monophonique** semblable à ce que fournirait un microphone unique placé au centre , et S=G-D signal **stéréo** qui transporte l'information différence . Il est très facile par somme et différence de restituer G et D à partir de M et S .

Le signal complexe qui modulera en fréquence la porteuse HF dans la bande des 100Mhz est construit de la façon suivante :

D'abord le signal M dont le spectre s'étend de 0 à 15kHz .Il est restitué par tout récepteur FM

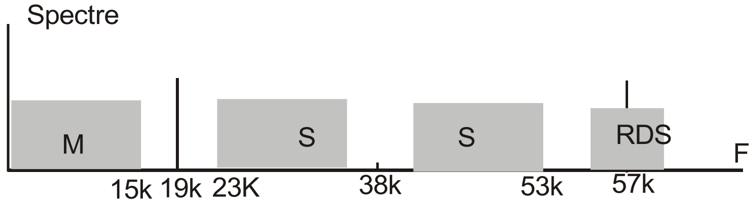
Le signal S est utilisé pour moduler en amplitude avec suppression de porteuse une porteuse à 38kHz ;C'est ce que l'on appelle une sous porteuse . Les deux bandes latérales s'étendent de 23 à 53 kHz .

La détection d'une modulation sans porteuse n'est possible que si l'on peut reconstituer la porteuse absente. Pour cela un signal sinusoïdal pur de fréquence 19kHz est ajouté. Isolé par un filtre étroit à la réception il permettra de reconstituer la porteuse à 38kHz par doublement de fréquence . Si l'émission en cours n'est pas stéréophonique , des informations parlées par exemple , la porteuse 19kHz n'est pas transmise . C'est elle qui commande l'allumage de la LED rouge présente sur tous les récepteurs indiquant que la réception est stéréophonique .

Enfin une seconde sous porteuse de fréquence 57kHz (l'harmonique 3 du 19kHz) est modulée en amplitude par un signal numérique et transporte des informations sur le trafic routier (système RDS)qui peuvent être exploitées par certains récepteurs auto radio de haut de gamme .

Au total le spectre du signal obtenu est reproduit ci contre C'est lui qui module en fréquence la porteuse HF .

Spectre du signal modulant dans le système stéréo FM.



Double modulation en quadrature

Cette technique a été utilisée pour la première fois dans le système de télévision en couleurs américain NTSC .

Pour transmettre une image en couleurs il faut transmettre 3 images prises respectivement à travers trois filtres Rouge Vert et B leu. Chaque image occupant environ 5Mhz une bande de 15Mhz semble nécessaire . En réalité notre œil possède deux types de détecteurs les bâtonnets et les cônes, les premiers très nombreux sont sensibles dans tout le spectre du violet au rouge alors que les seconds beaucoup plus dispersés sur la rétine existent sous trois variantes sensibles dans le rouge le vert ou le bleu. L'acuité visuelle est donc beaucoup plus grande pour l'éclairement que pour la couleur. Si vous éloignez progressivement de votre œil deux points lumineux respectivement bleu et rouge , à partir d'une certaine distance vous verrez toujours deux points mais leurs couleurs sont indiscernables. Les imprimeurs connaissent bien cette propriété de l'œil, ils impriment finement en noir et blanc les détails d'une image qu'ils colorient ensuite beaucoup plus grossièrement.

L'intensité lumineuse de chaque point d'une image doit donc être transmise avec la finesse maximale ce qui correspond par exemple à un spectre de 5Mhz de large alors qu'une bande bien plus étroite , 1,5Mhz par exemple , suffira pour l'information couleur.

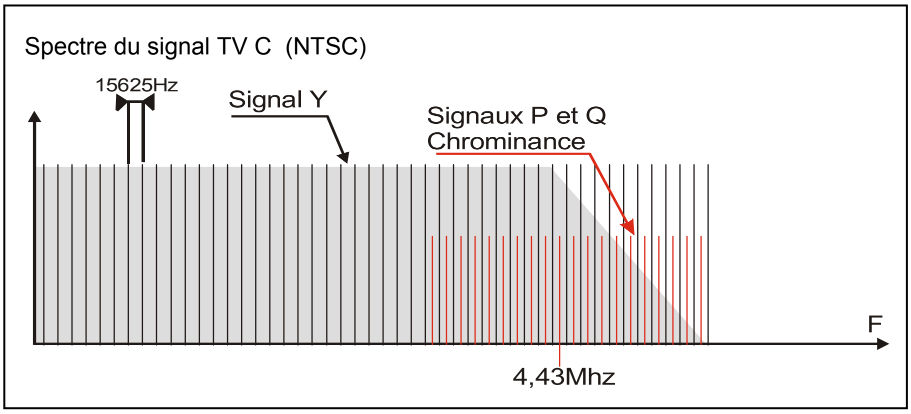
En TVC , à partir des trois signaux de base R V B sont crées 3 nouveaux signaux , la **luminance** Y=0,30R+0,59V+0,11B (les coefficients tiennent compte de la sensibilité relative de l'œil dans les trois couleurs) et deux signaux de **chrominance** P=R-Y et Q=B-Y

Le signal Y seul est exploité par les récepteurs monochromes.

Pour transmettre P et Q dont la bande est limitée à 2Mhz on utilise une seule sous porteuse et une double modulation en quadrature. Pour éviter d'élargir le spectre cette sous porteuse est choisie dans la bande 0-5Mhz à un emplacement ou elle perturbe le moins la réception de Y .

Si une image de télévision n'était constituée que de bandes verticales (comme un papier peint) toutes les lignes seraient identiques , le signal vidéo serait alors de forme quelconque mais périodique avec la périodicité du balayage ligne 15625Hz. Il aurait donc un spectre formé de raies distantes de 15625Hz.

L'image réelle n'est pas aussi régulière mais deux lignes successives restent très voisines, la forme du signal vidéo ne se modifie que lentement d'une ligne à la suivante. Le spectre n'est plus un spectre de raies mais il s'en rapproche et aux fréquences du type (k+1/2)15625 l'énergie présente est faible, le spectre est cannelé. Ceci est vrai pour le signal Y mais aussi pour P et Q . L'astuce consiste donc à intercaler le spectre de P et Q dans celui de Y en choisissant pour la sous porteuse de chrominance une fréquence (k+1/2)x15625 La fréquence choisie est 4,429Mhz (k=283)..Ainsi la sous porteuse couleur ne modifie que très faiblement l'image monochrome.



Si $\cos\omega_K t$ est la sous porteuse de chrominance on fabrique par déphasage $\sin\omega_K t$ porteuse en quadrature et on module ces deux porteuses en amplitude à suppression de porteuse par P et Q .Les deux signaux obtenus sont alors ajoutés. C'est ce signal complexe

$$P(t).\cos\omega_K t + Q(t).\sin\omega_K t$$

qui est mélangé au signal Y . A la réception une détection synchrone permettra de restituer P et Q à condition de disposer de la référence . Elle est transmise par salves de quelques périodes au début de chaque ligne et utilisées pour asservir une PLL

En Europe le système PAL ne se distingue du NTSC que par une inversion de phase de la sous-porteuse de chrominance d'une ligne à l'autre .

.